**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 12. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 7. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{\frac{3}{5}}{1\frac{1}{5}} + 3\frac{3}{8} \cdot 3\frac{3}{7} : \frac{2 - \frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}}{7\frac{5}{12} - 5.75} - \frac{13}{14}.$$

2. Stranici AC in BC ostrokotnega trikotnika ABC sta enako dolgi. Simetrala kota z vrhom A oklepa z višino trikotnika iz oglišča A kot, velik $15°$. Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika ABC. Upoštevaj vse možnosti.

3. Pred pričetkom razprodaj je par nekega modela čevljev stal 48 EUR. Na februarskih razprodajah so ceno tega modela znižali. Februarja so prodali za 50 % več parov tega modela čevljev kot januarja, prihodek od prodaje pa se je zvišal za $\frac{1}{4}$. Koliko je stal par čevljev na razprodaji? Za koliko odstotkov so zvišali ceno para čevljev po končanih razprodajah, da so dobili prvotno ceno?

4. Matjaž je zmnožil 5 zaporednih naravnih števil in dobil petmestno število ter ga zapisal na tablo. Reditelj je izbrisal števki na mestu enic in stotic, tako da je na tabli ostal zapis 55_4_. Katera števila je zmnožil Matjaž?

5. Mama je svojim hčerkam točno odmerila čas, ki ga lahko vse skupaj prebijejo za računalnikom. Najstarejša hči Tina je porabila $\frac{1}{4}$ predvidenega časa in še dodatnih 32 minut. Ana je porabila $\frac{1}{4}$ preostalega časa ter še 32 minut. Podobno je Neža porabila $\frac{1}{4}$ novega ostanka in še dodatnih 32 minut. Pia je porabila vseh preostalih 88 minut. Koliko minut je presedela vsaka sestra pred računalnikom?

dMFA

50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 12. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 8. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Reši enačbo $||x-1|-5|=3$.

2. Tine je zapisal 6 naravnih števil v vrsto. Tretje število ter vsako naslednje je enako vsoti dveh predhodnih števil. Izračunaj vsoto teh šestih števil, če je peto enako 14.

3. V podjetju so imeli večji bager, s katerim bi izkopali jamo v 12 urah, in dva enaka manjša bagra. Jamo so začeli izkopavati z večjim bagrom. Po 2 urah so nadaljevali izkopavanje še z enim manjšim bagrom, po nadaljnjih 2 urah pa še z drugim manjšim bagrom. Tako je bilo izkopavanje končano v 8 urah. Koliko časa bi trajal izkop te jame, če bi ves čas izkopavali le z enim manjšim bagrom?

4. Na začetku je bilo v vsaki izmed 10 posod enako število frnikol. Iz prve posode vzamemo nekaj frnikol. Iz druge posode vzamemo dvakrat toliko frnikol kot iz prve. Iz tretje posode vzamemo trikrat toliko frnikol kot iz prve. Postopek nadaljujemo do desete posode. Tako v deseti posodi ostane le ena frnikola, v vseh 10 posodah skupaj pa ostane 370 frnikol. Koliko frnikol je bilo v vsaki posodi na začetku?

5. Dolžina daljice, ki povezuje razpolovišči obeh osnovnic trapeza, je enaka polovici razlike dolžin osnovnic trapeza. Izračunaj vsoto velikosti kotov ob daljši osnovnici. Nariši skico.

dMFA

50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 12. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 9. razred

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Vsak učenec neke šole je sodeloval v eni izmed dejavnosti: kulturni, športni ali tehnični. Na začetku šolskega leta so bila števila učencev v posamezni dejavnosti v razmerju $3 : 4 : 5$. Med letom so nekateri učenci zamenjali dejavnost. Ob koncu šolskega leta so ugotovili, da je bilo v eni izmed dejavnosti 40 učencev manj kot na začetku in da so bila števila učencev v posamezni dejavnosti v razmerju $7 : 6 : 5$, pri čemer so upoštevali dejavnosti v enakem vrstnem redu kot na začetku. Koliko je bilo vseh učencev na tej šoli?

2. Dana je krožnica s središčem S in polmerom 4 cm. Na njej zapovrstjo ležijo oglišča štirikotnika $ABCD$, za katerega velja $\sphericalangle ASB = 90°$, $\sphericalangle BSC = 60°$ in $\sphericalangle CSD = 90°$. Izračunaj obseg in ploščino štirikotnika ABCD. Rezultat naj bo točen.

3. Statistik vrže pošteno igralno kocko dvajsetkrat in zapiše števila pik: 4, 2, 1, 5, 6, 4, 3, 4, 6, 2, 3, 2, 2, 4, 6, 3, 5, 1, 2, x. Določi x, če veš: x ni 6 in mediana podatkov je za 1.5 večja od edinega modusa. Kolikšna je aritmetična sredina?

4. Eno izmed oglišč kocke je 7 cm oddaljeno od telesne diagonale kocke. Izračunaj površino in prostornino te kocke ter rezultata racionaliziraj.

5. Izračunaj:

$$1 - \frac{1}{2} =$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$$
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$\frac{1}{2000 \cdot 2001} + \frac{1}{2001 \cdot 2002} + \frac{1}{2002 \cdot 2003} + \frac{1}{2003 \cdot 2004} + \ldots + \frac{1}{2998 \cdot 2999} + \frac{1}{2999 \cdot 3000} =$$

50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 12. april 2014

Rešitve za 7. razred

1.

$$\frac{\frac{3}{5}}{1\frac{1}{5}} + 3\frac{3}{8}\cdot 3\frac{3}{7} : \frac{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}}{7\frac{5}{12}-5.75} - \frac{13}{14} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}} + \frac{27}{8}\cdot\frac{24}{7} : \frac{2-\frac{1}{2-\frac{1}{\frac{3}{2}}}}{7\frac{5}{12}-5\frac{3}{4}} - \frac{13}{14} =$$

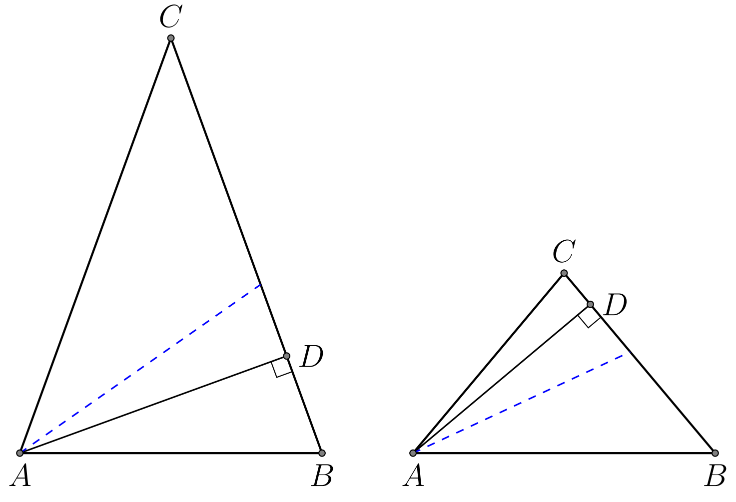
$$= \frac{3\cdot 5}{5\cdot 6} + \frac{27\cdot 3}{1\cdot 7} : \frac{2-\frac{1}{2-\frac{2}{3}}}{7\frac{5}{12}-5\frac{9}{12}} - \frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \frac{81}{7} : \frac{2-\frac{1}{\frac{4}{3}}}{1\frac{8}{12}} - \frac{13}{14} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{81}{7} : \frac{2-\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}} - \frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \frac{81}{7} : \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}} - \frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \frac{81}{7} : \frac{3}{4} - \frac{13}{14} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{81}{7}\cdot\frac{4}{3} - \frac{13}{14} = \frac{1}{2} + \frac{108}{7} - \frac{13}{14} = \frac{7}{14} + \frac{216}{14} - \frac{13}{14} = \frac{210}{14} = 15$$

Izračunana vrednost prvega člena: $\frac{\frac{3}{5}}{1\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$. .... 1 točka
Izračunan zmnožek faktorjev v drugem členu: $3\frac{3}{8}\cdot 3\frac{3}{7} = \frac{81}{7}$. .... 1 točka
Izračunan števec delitelja v drugem členu: $2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} = \frac{5}{4}$. .... 2 točki
Zapis decimalnega števila z ulomkom: $5.75 = 5\frac{3}{4}$. .... 1 točka
Izračunan imenovalec delitelja v drugem členu: $7\frac{5}{12} - 5\frac{3}{4} = \frac{5}{3}$. .... 1 točka
Izračunana vrednost delitelja v drugem členu: $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{4}$. .... 1 točka
Izračunana vrednost drugega člena: $\frac{81}{7} : \frac{3}{4} = \frac{108}{7}$. .... 1 točka
Zapisan skupni imenovalec vseh treh členov: $\frac{7}{14} + \frac{216}{14} - \frac{13}{14}$. .... 1 točka
Rezultat: $\frac{210}{14} = 15$. .... 1 točka

2. Upoštevamo dve možnosti: simetrala kota lahko leži nad višino na stranico a oziroma pod njo.



Trikotnik ABC je enakokrak z osnovnico AB, torej je kot z vrhom A skladen s kotom z vrhom B. Označimo ju z α. V prvem primeru so notranji koti trikotnika ABD enaki: $\frac{\alpha}{2} - 15°$, α in $90°$. Vsota velikosti notranjih kotov trikotnika je $180°$: $\frac{\alpha}{2} - 15° + \alpha + 90° = 180°$. Torej je $\alpha = 70°$. V tem primeru je kot z vrhom C velik $40°$. Velikosti notranjih kotov trikotnika so $70°$, $70°$ in $40°$.

V drugem primeru so notranji trikotnika ABD enaki: $\frac{\alpha}{2} + 15°$, α in $90°$. Zopet upoštevamo, da je vsota velikosti notranjih kotov trikotnika enaka $180°$, in dobimo $\alpha = 50°$. Kot z vrhom C je velik $180° - 50° - 50° = 80°$. Notranji koti trikotnika so torej veliki $50°$, $50°$ in $80°$.

Narisani obe možnosti: simetrala nad višino, simetrala pod višino. ......2 točki
Sklep, da sta kota z vrhoma A in B skladna. ....1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABD v prvem primeru: $\frac{\alpha}{2} - 15°$, α in $90°$. ....1 točka
Upoštevanje vsote velikosti notranjih kotov trikotnika. .... 1 točka
Izračunana velikost kota $\alpha = 70°$. .... 1 točka
Izračunana velikost kota z vrhom C ter zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABC: $70°$, $70°$ in $40°$. .... 1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABD v drugem primeru: $\frac{\alpha}{2} + 15°$, α in $90°$. ....1 točka
Izračunana velikost kota $\alpha = 50°$. .... 1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABC: $50°$, $50°$ in $80°$. .... 1 točka

3. Število prodanih parov v januarju označimo s k, torej je januarski prihodek enak $48k$. Na februarskih razprodajah je bilo za 50% več prodanih parov, torej $1.5k$. Ceno para čevljev na razprodajah označimo z x in dobimo, da je prihodek v februarju enak $1.5k{\cdot}x$. Ker je bil februarja prihodek višji za $\frac{1}{4}$ glede na januar, velja $\frac{1}{4} \cdot 48k = 12k$. Sklepamo, da je bil prihodek februarja enak: $48k + 12k = 60k$. Izenačimo oba izraza za prihodek in dobimo enačbo: $1.5k \cdot x = 60k$. Enačbo delimo z $1.5k$ in dobimo rešitev $x = 40$. Torej je en par čevljev na razprodajah stal 40 EUR.

   Če želimo dobiti prvotno ceno enega para čevljev, jo je potrebno zvišati za 8 EUR. V odstotkih to pomeni $\frac{8}{40} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$

Zapis prihodka v januarju: $48k$. .... 1 točka
Ugotovitev števila prodanih parov čevljev na razprodaji: $1.5k$. .... 1 točka
Sklep o višini prihodka glede na ceno para čevljev v februarju x: $1.5k \cdot x$. 1 točka
Ugotovitev, da je bil prihodek v februarju višji za $12k$. .... 1 točka
Zapisana enačba: $1.5k \cdot x = 60k$. .... 2 točki
Izračunana rešitev enačbe: $x = 40$. ....1 točka
Odgovor: En par čevljev je februarja stal 40 EUR. .... 1 točka
Sklep, da je ceno para čevljev potrebno zvišati za 8 EUR, kar pomeni $\frac{8}{40} = 20\%$. 2 točki

Opomba: reševanje izključno z izmišljenim številskim primerom prinese največ 5 točk.

4. Eno izmed petih zaporednih naravnih števil je deljivo s 5, najmanj dve izmed teh števil pa sta sodi. Torej je njihov zmnožek deljiv z 10, zato je bila na mestu enic zapisana števka 0. Poleg tega je zmnožek deljiv s 3, saj je med petimi zaporednimi števili vsaj eno deljivo s 3. Po kriteriju o deljivost s 3 je vsota števk števila $55s40$ deljiva s 3. Vsota števk je enaka $14 + s$, torej je števka na mestu stotic lahko enaka 1, 4 ali 7.

Med petimi zaporednimi naravnimi števili je eno zagotovo deljivo s 4, to pa pomeni, da je njihov zmnožek deljiv tudi z 8. Torej mora biti tromestni konec zmnožka deljiv z 8, kar velja le v primeru števila 55440. Dobljeno število je zmnožek števil 7, 8, 9, 10 in 11.

Ugotovitev, da je eno izmed petih zaporednih naravnih števil deljivo s 5. 1 točka
Ugotovitev, da sta najmanj dve izmed iskanih števil sodi. ....1 točka
Sklep, da je zmnožek deljiv z 10 in da na mestu enic stoji števka 0. ......1 točka
Ugotovitev, da je vsaj eno izmed iskanih števil deljivo s 3. ....1 točka
Sklep, da je zapisano število deljivo s 3 ter da na mestu stotic stoji 1, 4 ali 7. ..2 točki
Sklep, da je število deljivo z 8, saj je en faktor deljiv s 4. ....1 točka
Ugotovitev, da temu ustreza le 55440. ....1 točka
Zapis iskanih števil: 7, 8, 9, 10 in 11. ....2 točki

Opomba: Uganjena rešitev brez utemeljitve prinese največ 2 točki.

5. Razberemo, da je Neža poleg 32 minut porabila $\frac{1}{4}$ časa, ki sta ga Tina in Ana pustili na razpolago Pii ter Neži. Seštevek Pijinih 88 minut ter Nežinih 32 minut je enak 120 minut, kar predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga prvi dve sestri nista porabili. Torej sta Tina in Ana ostalima dvema pustili 160 minut. Podobno je Ana porabila $\frac{1}{4}$ časa, ki ga Tina ni porabila, ter še dodatnih 32 minut. Potemtakem 192 minut predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga je Tina pustila ostalim trem. Najstarejša hči ni porabila 256 minut. Za računalnikom je prebila $\frac{1}{4}$ časa, ki jim ga je namenila mama, ter dodatnih 32 minut. Sklepamo podobno kot prej: 288 minut predstavlja $\frac{3}{4}$ skupnega časa. Mama je svojim hčeram namenila 384 minut. Iz tega lahko izračunamo čas za vsako izmed sester, ki ga je prebila za računalnikom. Tina $\frac{1}{4}$ od 384 minut ter 32 minut, torej 128 minut. Ana $\frac{1}{4}$ od 256 minut ter 32 minut, kar pomeni 96 minut. Neža je porabila $\frac{1}{4}$ od 160 minut ter 32 minut časa, skupaj 72 minut. Pia je porabila vseh preostalih 88 minut.

Ugotovitev, da 120 minut predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga Tina in Ana nista porabili. ..2 točki
Izračunan čas, ki sta prvi dve sestri pustili ostalima dvema: 160 minut. . 1 točka
Sklep, da Aninih 32 minut ter 160 minut skupaj predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga Tina ni porabila. ....2 točki
Izračun časa, ki ga je Tina pustila mlajšim sestram: 256 minut. ....1 točka
Ugotovitev, da 256 minut skupaj s Tininimi 32 minutami predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki jim ga je namenila mama. ....1 točka
Izračunan skupni čas, ki so ga lahko vse skupaj prebile za računalnikom: 384 minut. ....1 točka
Izračunani ter zapisani časi za vsako izmed sester: Tina je porabila 128 minut, Ana 96 minut, Neža 72 minut in Pia 88 minut. ....2 točki

Rešitve za 8. razred

1. Ločimo dve možnosti $|x-1|-5=3$ in $|x-1|-5=-3$. Prvo enačbo preoblikujemo v $|x-1|=8$ in dobimo dve enačbi:
$x-1=8$: rešitev te enačbe je $x=9$.
$x-1=-8$: v tem primeru je rešitev enačbe $x=-7$.
V drugem primeru enačbo preoblikujemo v enačbo $|x-1|=2$. Tokrat je potrebno rešiti naslednji enačbi:
$x-1=2$: rešitev je $x=3$.
$x-1=-2$ z rešitvijo $x=-1$.

Upoštevanje obeh možnosti: $|x-1|-5=3$ in $|x-1|-5=-3$ . ... 2 točki
Zapis ekvivalentne enačbe k prvi možnosti: $|x-1|=8$. .... 1 točka
Odprava absolutne vrednosti in upoštevanje dveh možnosti. .... 1 točka
Zapisana rešitev enačbe $x-1=8$: $x=9$. .... 1 točka
Zapisana rešitev enačbe $x-1=-8$: $x=-7$. .... 1 točka
Zapis enakovredne enačbe k drugi možnosti: $|x-1|=2$. .... 1 točka
Ponovno upoštevanje dveh možnosti. .... 1 točka
Zapisana rešitev enačbe $x-1=2$: $x=3$. .... 1 točka
Zapisana rešitev enačbe $x-1=-2$ z rešitvijo $x=-1$. .... 1 točka

2. 1. način
Označimo prvo število z a in drugo število z b. Vsako število, razen prvih dveh, je enako vsoti dveh predhodno zapisanih števil. Torej imamo števila: a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$ ter $3a+5b$. Njihova vsota je enaka $8a+12b$ oziroma $4(2a+3b)$. Vemo, da je peto število enako 14, torej velja $2a+3b=14$. Tako je vsota teh šestih števil enaka $4\cdot 14=56$.

Upoštevanje, da je vsako število, razen prvih dveh, enako vsoti dveh predhodno zapisanih števil:
Zapisano tretje število: $a+b$. .... 1 točka
Zapis četrtega števila: $a+2b$. .... 1 točka
Zapis petega števila: $2a+3b$. .... 1 točka
Zapisano šesto število: $3a+5b$. .... 1 točka
Izračuna ter zapisana vsota vseh 6 števil: $8a+12b$. .... 2 točki
Izpostavljanje skupnega faktorja: $4(2a+3b)$. .... 2 točki
Sklep, da iz enakosti $2a+3b=14$ sledi, da je vsota enaka: $4\cdot 14=56$. .... 2 točki

Opomba: Uganjena rešitev brez utemeljitve prinese največ 2 točki.

2. način
Označimo prvo število z a in drugo število z b. Vsako število, razen prvih dveh, je enako vsoti dveh predhodno zapisanih števil, peto število pa je enako 14. Torej imamo števila: a, b, $a+b$, $a+2b$, 14 ter $a+2b+14$. Za peto število velja $2a+3b=14$, kar pomeni, da je b sodo naravno število. Število b je lahko le 2 ali 4, sicer bi bila vsota $2a+3b$ večja od 14. Če je $b=2$, mora biti $a=4$. Torej dobimo števila: 4, 2, 6, 8, 14 in 22, katerih vsota je enaka 56. Če pa je $b=4$, mora biti $a=1$. V tem primeru dobimo števila: 1, 4, 5, 9, 14 in 23, katerih vsota je prav tako 56.

Upoštevanje, da je vsako število, razen prvih dveh, enako vsoti dveh predhodno zapisanih števil:
Zapisano tretje število: $a+b$**. ... 1 točka**
Zapis četrtega števila: $a+2b$**. ... 1 točka**
Zapisano šesto število: $a+2b+14$**. ... 1 točka**
Zapisana enakost za peto število: $2a+3b=14$**. ... 1 točka**
Sklep in utemeljitev, da je b lahko le 2 **ali** 4**. ... 2 točki**
Obravnava možnosti $b=2$ **z zapisanimi števili in izračunano vsoto** 56**. ... 2 točki**
Obravnava možnosti $b=4$ **z zapisanimi števili in izračunano vsoto** 56**. ... 2 točki**

3. Z večjim bagrom izkopljejo v eni uri $\frac{1}{12}$ jame. Ker je bilo delo končano v 8 urah, so z večjim bagrom izkopali $\frac{8}{12}$ oziroma $\frac{2}{3}$ jame. Preostalo $\frac{1}{3}$ jame so izkopali z manjšima bagroma. S prvim manjšim bagrom so delali 6, z drugim pa 4 ure, skupaj torej 10 delovnih ur za $\frac{1}{3}$ jame. To pomeni, da bi v eni uri z vsakim izmed manjših bagrov izkopali $\frac{1}{30}$ jame. Če bi izkopavali le z enim manjšim bagrom, bi izkop jame trajal 30 ur.

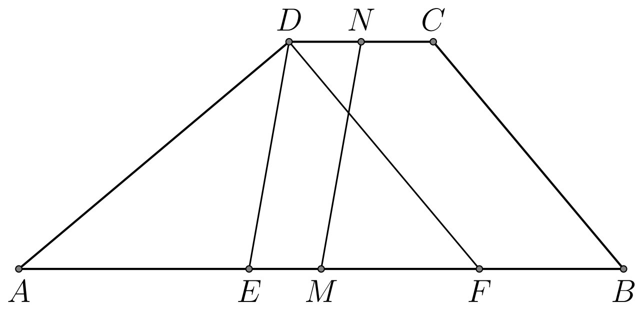
Ugotovitev, da z večjim bagrom vsako uro izkopljejo $\frac{1}{12}$ **jame. ... 1 točka**
Sklep, da so z večjim bagrom izkopali $\frac{2}{3}$ **jame. ... 1 točka**
Ugotovitev, da so z manjšima bagroma skupaj izkopali $\frac{1}{3}$ **jame. ... 1 točka**
Ugotovitev, da so s prvim manjšim bagrom delali 6**, z drugim pa** 4 **ure. .. 2 točki**
Sklep, da so z obema manjšima bagroma skupaj v 10 **urah izkopali** $\frac{1}{3}$ **jame. ... 1 točka**
Sklep, da bi z vsakim od njiju v eni uri izkopali $\frac{1}{30}$ **jame. ... 2 točki**
Odgovor: Z manjšim bagrom bi izkopali jamo v 30 **urah. ... 2 točki**

4. Število odvzetih frnikol iz prve posode označimo z x. Iz druge posode smo vzeli $2x$ frnikol, iz tretje $3x$, četrte $4x$ in tako naprej. Skupno smo odvzeli $x+2x+3x+\cdots+10x$ frnikol oziroma $55x$. V deseti posodi je ostala le 1 frnikola, torej je bila na začetku v tej posodi $10x+1$ frnikola. Ker je bilo v vsaki izmed posod enako število frnikol, je bilo skupno število vseh frnikol enako $10\cdot(10x+1)$. Ostalo jih je 370, torej je potrebno rešiti enačbo: $10\cdot(10x+1)-55x=370$, katere rešitev je $x=8$. V vsaki posodi je bilo na začetku 81 frnikol.

Zapisana števila odvzetih frnikol iz posamezne posode: x, $2x$, $3x$ **...** $10x$**. 2 točki**
Izračunano skupno število odvzetih frnikol: $55x$**. ... 1 točka**
Sklep, da je bila v deseti posodi $10x+1$ **frnikola. ... 1 točka**
Ugotovitev, da je bilo v vseh posodah skupaj $10\cdot(10x+1)$ **frnikol. ... 1 točka**
Zapisana enačba: $10\cdot(10x+1)-55x=370$**. ... 2 točki**
Izračunana rešitev enačbe: $x=8$**. ... 2 točki**
Izračunano število frnikol v posamezno posodi, torej 81 **frnikol. ... 1 točka**

Opomba: če tekmovalec rešuje nalogo s poskušanjem in pri tem ne preveri čisto vseh možnosti, prejme največ 7 točk.

5. Narišimo skico



Označimo kota ob daljši osnovnici trapeza $ABCD$: $\sphericalangle BAD = \alpha$ in $\sphericalangle CBA = \beta$. Razpolovišči osnovnic označimo s točkama M in N. Vzporednica k daljici MN skozi točko D seka osnovnico AB v točki E. Vzporednica k daljici BC skozi točko D seka osnovnico AB v točki F. Ker je točka M razpolovišče daljše osnovnice a, velja $|MB| = \frac{\alpha}{2}$. Daljici EM in ND sta enako dolgi, in sicer je $|EM| = \frac{c}{2}$, saj je točka N razpolovišče osnovnice c. Torej velja $|AE| = a - \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$. Trikotnik AED je enakokrak z osnovnico AD, saj iz besedila in skice razberemo: $|DE| = |MN| = \frac{a-c}{2} = |AE|$. Od tod sledi $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ADE = \alpha$. Trikotnik EFD je enakokrak z osnovnico FD, saj je dolžina stranice EF enaka $|EF| = a - c - \frac{a-c}{2} = \frac{a-c}{2}$. Torej velja $\sphericalangle DFE = \sphericalangle EDF = \beta$. Velikosti notranjih kotov trikotnika AFD so α, β in $\alpha + \beta$, vsota velikosti pa je $2\alpha + 2\beta = 180°$. Vsota velikosti kotov ob daljši osnovnici trapeza je torej enaka $90°$.

Narisana skica z označeno zveznico razpolovišč obeh osnovnic. .... 1 točka
Ugotovitev, da je dolžina daljice MN je enaka $\frac{a-c}{2}$. .... 1 točka
Izračunana dolžina daljice AE: $|AE| = \frac{a-c}{2}$. .... 1 točka
Sklep, da je trikotnik AED enakokrak z osnovnico AD. .... 1 točka
Sklep, da za dva notranja kota trikotnika AED velja: $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ADE = \alpha$. ....1 točka
Izračunana dolžina daljice EF: $|EF| = \frac{a-c}{2}$. .... 1 točka
Sklep, da je trikotnik EFD enakokrak z osnovnico FD. ....1 točka
Sklep, da za dva notranja kota trikotnika EFD velja: $\sphericalangle DFE = \sphericalangle EDF = \beta$. ....1 točka
Ugotovitev, da v trikotniku AFD velja $2\alpha + 2\beta = 180°$. .... 1 točka
Vsota kotov ob daljši osnovnici trapeza je enaka $\alpha + \beta = 90°$. .... 1 točka

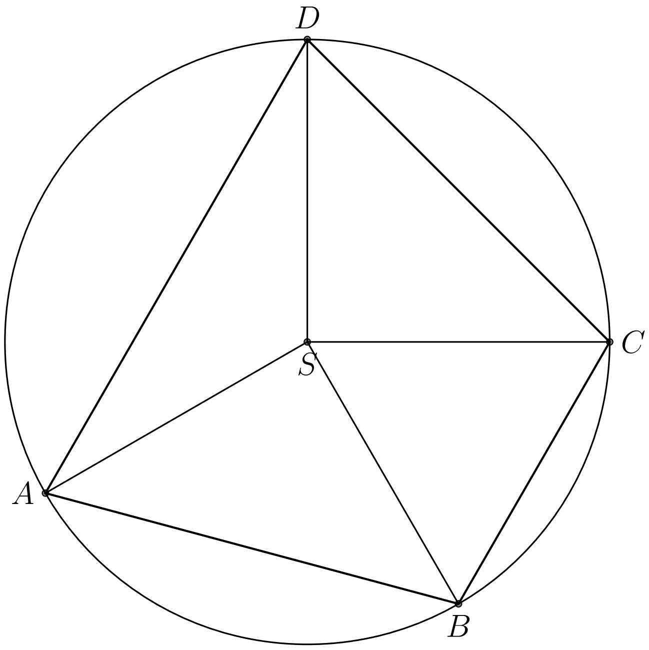
Opomba: če tekmovalec izhaja iz napačne predpostavke, da je trapez enakokrak, dobi največ dve točki. Prav tako dobi največ 2 točki v primeru, da napačno predpostavi, da je zveznica razpolovišč osnovnic višina trapeza.

Rešitve za 9. razred

1. Število vseh učencev na šoli označimo z n. Iz prvega razmerja razberemo, da je bilo število učencev pri posamezni dejavnosti na začetku šolskega leta enako: $\frac{3n}{12} = \frac{n}{4}$, $\frac{4n}{12} = \frac{n}{3}$ in $\frac{5n}{12}$. Iz drugega razmerja sledi, da je bilo število učencev pri posamezni dejavnosti ob koncu šolskega leta enako $\frac{7n}{18}$, $\frac{n}{3}$ in $\frac{5n}{18}$. Opazimo, da je bilo pri prvi dejavnosti več učencev, pri drugi enako, pri tretji pa manj kot na začetku leta. Torej je bilo v tretji dejavnosti ob koncu šolskega leta 40 učencev manj, zato velja enačba: $\frac{5n}{12} - \frac{5n}{18} = 40$. Rešitev enačbe je $n = 288$. Na šoli je bilo 288 učencev.

Upoštevanje prvega razmerja ter zapis števil učencev po dejavnostih: $\frac{3n}{12} = \frac{n}{4}$, $\frac{4n}{12} = \frac{n}{3}$ in $\frac{5n}{12}$. .... 3 točke
Zapis števil učencev po dejavnostih ob koncu leta: $\frac{7n}{18}$, $\frac{n}{3}$ in $\frac{5n}{18}$. .... 2 točki
Ugotovitev, da je pri prvi dejavnosti več, pri drugi enako, pri tretji pa manj učencev kot na začetku. .... 2 točki
Zapisana enačba za število učencev v tretji dejavnosti: $\frac{5n}{12} - \frac{5n}{18} = 40$. .... 2 točki
Rešitev enačbe in odgovor: Na šoli je bilo 288 učencev. .... 1 točka

2. Narišimo skico



Iz danih velikosti kotov izračunamo velikost kota $\sphericalangle DSA$, in sicer $120°$. Daljici AB in CD sta enako dolgi, saj sta diagonali kvadrata s stranico dolžine 4 cm: $|AB| = |CD| = 4\sqrt{2}$ cm. Trikotnik BCS je enakostraničen, torej velja: $|BC| = 4$ cm. Trikotnik ASD je enakokrak z osnovnico AD, torej ga višina na stranico AD razpolavlja na dva skladna dela. Vsak del je enak polovici enakostraničnega trikotnika z višino enako $\frac{|AD|}{2}$, zato velja $|AD| = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$ cm. Obseg štirikotnika $ABCD$ je torej enak: $o = 4\sqrt{2}+4+4\sqrt{2}+4\sqrt{3} = 4+8\sqrt{2}+4\sqrt{3}$ cm. Vsota ploščin obeh pravokotnih trikotnikov ABS in CDS je enaka ploščini kvadrata s stranico dolžine 4 cm, torej 16 cm^2. Ploščina enakostraničnega trikotnika BCS je enaka $4\sqrt{3}$ cm^2. Prav tako je ploščina trikotnika

ASD enaka $4\sqrt{3}$ cm^2. Ploščina štirikotnika $ABCD$ je zato enaka: $p = 16 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = (16 + 8\sqrt{3})$ cm^2.

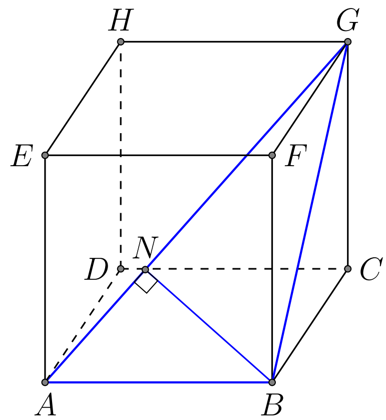
Izračunana velikost kota $\sphericalangle DSA$: $120°$. .... 1 točka
Ugotovitev, da sta daljici AB in CD enako dolgi kot diagonali kvadrata s stranico dolžine 4 cm ter zapisani njuni dolžini: $4\sqrt{2}$ cm. .... 1 točka
Sklep: $|BC| = 4$ cm, saj je BC stranica enakostraničnega trikotnika. .... 1 točka
Ugotovitev, da višina na stranico AD razpolavlja trikotnik ASD na dva skladna dela, ki sta polovici enakostraničnega trikotnika. .... 1 točka
Sklep, za daljico AD velja: $|AD| = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$ cm. .... 1 točka
Izračunan obseg štirikotnika $ABCD$: $o = 4 + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ cm. .... 1 točka
Ugotovitev, da je vsota ploščin obeh trikotnikov ABS in CDS enaka ploščini kvadrata s stranico dolžine 4 cm, torej 16 cm^2. .... 1 točka
Izračunana ploščina enakostraničnega trikotnika BCS: $4\sqrt{3}$ cm^2. .... 1 točka
Ugotovitev, da je ploščina trikotnika ASD enaka $4\sqrt{3}$ cm^2. .... 1 točka
Izračunana ploščina štirikotnika $ABCD$: $p = 16 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = (16 + 8\sqrt{3})$ cm^2. 1 točka

Zadnje štiri alineje v točkovniku imajo alternativno možnost:
Utemeljitev, da je $ABCD$ trapez. .... 1 točka
Izračunana višina trapeza $(2 + 2\sqrt{3})$ cm .... 2 točki
Izračunana ploščina trapeza .... 1 točka.

3. Vseh 19 znanih podatkov uredimo po velikosti: $1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6$. Mediana teh podatkov je vrednost na desetem mestu in je enaka 3. Modus teh podatkov je enak 2. Če bi bil $x \leq 3$, bi bila mediana vseh dvajsetih podatkov še vedno enaka 3, modus pa 2, kar ne ustreza zahtevam naloge. Torej je x lahko enak le 4 ali 5. V obeh primerih je mediana enaka 3.5. Če bi bil $x = 4$, bi imeli podatki dva modusa: 2 in 4, kar ne ustreza pogojem naloge. Edina možnost je, da je $x = 5$, saj je v tem primeru modus enak 2. Izračunamo še aritmetično sredino vseh podatkov. Ta je enaka: $\overline{x} = \frac{2\cdot1+5\cdot2+3\cdot3+4\cdot4+3\cdot5+3\cdot6}{20} = \frac{70}{20} = 3.5$.

Zapis podatkov po velikosti. .... 1 točka
Ugotovitev, da je mediana znanih podatkov enaka 3, modus pa 2. .... 2 točki
Sklep, da je $x > 3$, saj bi bila sicer mediana vseh dvajsetih podatkov enaka 3, modus pa 2. .... 2 točki
Zapisana mediana v primeru, če je x enak 4 ali 5: $Me = 3.5$. .... 1 točka
Ugotovitev, da x ne sme biti enak 4, saj bi sicer nastopila dva modusa. . 1 točka
Sklep, da je $x = 5$, saj je v tem primeru modus enak 2. .... 1 točka
Izračunana aritmetična sredina vseh podatkov: $\overline{x} = 3.5$ .... 2 točki

4. Narišimo skico



Stranico kocke označimo z a. Presečišče telesne diagonale AG in pravokotnice na njo iz oglišča B pa označimo z N. Iz besedila razberemo, da je dolžina daljice BN enaka 7 cm. Telesna diagonala kocke je dolga $a\sqrt{3}$ cm, ploskovna pa $a\sqrt{2}$ cm. Torej za stranice trikotnika ABG velja: $|AB| = a$, $|BG| = a\sqrt{2}$ in $|AG| = a\sqrt{3}$. Ker je daljica BN višina trikotnika ABG na stranico AG, je njegova ploščina enaka: $p = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$. Vemo, da je trikotnik ABG pravokoten s katetama dolžine a in $a\sqrt{2}$, torej lahko njegovo ploščino zapišemo tudi kot $p = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Izenačimo oba izraza za ploščino in dobimo: $a = \frac{7\sqrt{6}}{2}$ cm. Površina kocke je enaka $P = 6a^2 = 441$ cm^2, prostornina pa $V = a^3 = \frac{1029\sqrt{6}}{4}$ cm^3.

Definicija točke N ter zapisana dolžina daljice BN: 7 cm. ....1 točka
Ugotovitev dolžin stranic trikotnika ABG: $|AB| = a$, $|BG| = a\sqrt{2}$ in $|AG| = a\sqrt{3}$. 2 točki
Sklep, da je daljica BN višina trikotnika ABG na stranico AG, ter izračunana ploščina: $p = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$. ....1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik ABG pravokoten s ploščino: $p = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. ....2 točki
Izračunana dolžina stranice a: $a = \frac{7\sqrt{6}}{2}$ cm. ....1 točka
Izračunana površina kocke: $P = 6a^2 = 441$ cm^2. ....1 točka
Izračunana prostornina kocke ter racionaliziran rezultat: $V = a^3 = \frac{1029\sqrt{6}}{4}$ cm^3...2 točki

5. Izračunamo: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, in $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Imenovalce dobljenih rezultatov lahko zapišemo kot produkt dveh zaporednih števil. Torej velja: $\frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{12} = \frac{1}{3\cdot 4}$ in $\frac{1}{20} = \frac{1}{4\cdot 5}$, kar je razvidno tudi iz enakosti $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Vsak člen izraza $\frac{1}{2000\cdot 2001} + \frac{1}{2001\cdot 2002} + \frac{1}{2002\cdot 2003} + \frac{1}{2003\cdot 2004} + \ldots + \frac{1}{2998\cdot 2999} + \frac{1}{2999\cdot 3000}$ zamenjamo z razliko dveh ulomkov in dobimo: $\frac{1}{2000} - \frac{1}{2001} + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} + \ldots + \frac{1}{2998} - \frac{1}{2999} + \frac{1}{2999} - \frac{1}{3000}$. Vsi členi razen prvega in zadnjega se odštejejo in ostane: $\frac{1}{2000} - \frac{1}{3000} = \frac{3-2}{6000} = \frac{1}{6000}$.

Izračunane vrednosti prvih štirih računov. ....2 točki
Vrednost petega izraza: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. ....2 točki
Uporaba enakosti $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ v šestem primeru. ....2 točki
Ugotovitev, da se vsi členi razen prvega in zadnjega odštejejo. ....2 točki
Upoštevanje skupnega imenovalca. ....1 točka

Izračunana vrednost izraza: $\frac{1}{6000}$. ....1 točka