Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

45. tekmovanje iz matematike
za Vegovo priznanje
Področno tekmovanje, 1. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA SEDMI RAZRED

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Katero od naštetih števil je večje od $\frac{3}{5}$ in manjše od $\frac{5}{6}$?

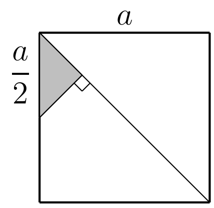
(A) $\frac{8}{15}$ **(B)** 0.7 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 0.2 **(E)** 0.9

A2. Od 76 učencev jih 48 obiskuje rokometni krožek, 39 učencev obiskuje dramski krožek, 18 učencev pa oba krožka. Koliko učencev ni vključenih niti v rokometni niti v dramski krožek?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

A3. Ploščina osenčenega trikotnika meri 4 cm^2. Koliko meri obseg kvadrata?

(A) 4 cm **(B)** 8 cm **(C)** 16 cm **(D)** 32 cm **(E)** 64 cm

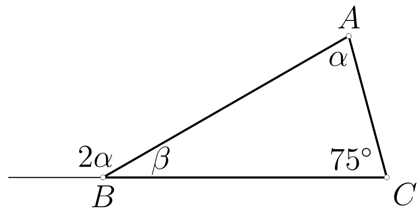


A4. Tomaž in Peter imata vsak po 45 znamk. Tomaž ima $\frac{4}{5}$ znamk iz tujine, ostale so slovenske. Peter ima $\frac{2}{5}$ znamk iz tujine, ostale pa iz Slovenije. Koliko slovenskih znamk ima Peter več kot Tomaž?

(A) 5 **(B)** 9 **(C)** 18 **(D)** 27 **(E)** 36

A5. Koti trikotnika ABC merijo α, β in $75°$, zunanji kot pri oglišču B pa je enak 2α (glej sliko). Koliko meri kot β?

(A) 30° **(B)** 45° **(C)** 50° **(D)** 60° **(E)** 75°

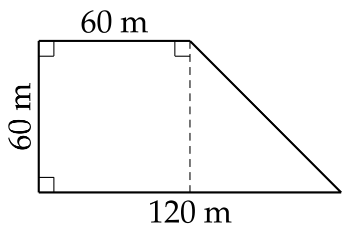


A6. Koliko je takih naravnih števil, ki delijo število 2009?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

A7. Zemljišče ima obliko štirikotnika (glej sliko). Kolikšna je ploščina tega zemljišča?

(A) 540 a **(B)** 0.054 km^2 **(C)** 0.54 ha
(D) 54 m^2 **(E)** 5.4 ha



A8. Krožnici s polmeroma 2 cm in 5 cm ležita v ravnini tako, da se sekata. Katera od naslednjih vrednosti je lahko razdalja med njunima središčema?

(A) 0.5 cm **(B)** 1 cm **(C)** 2.5 cm **(D)** 4 cm **(E)** 8 cm

B1. Katero število moramo prišteti k $\frac{3}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$, da dobimo 2.5?

(6 točk)

B2. Akvarij z vodo tehta 35 kilogramov. Ko iz akvarija izhlapi $\frac{1}{4}$ vode, se celotna masa zmanjša za $\frac{1}{5}$. Kolikšna je masa praznega akvarija?

(6 točk)

B3. Eden izmed kotov v pravokotnem trikotniku meri 55°. Izračunaj velikost kota, ki ga simetrala največjega trikotnikovega zunanjega kota oklepa z nosilko višine na najdaljšo stranico trikotnika. *(6 točk)*

45. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Področno tekmovanje, 1. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA OSMI RAZRED

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Vsota kubov treh celih števil je enaka 216. Katera od navedenih trojic ustreza trditvi?

(**A**) $3, 4, 5$ (**B**) $-3, 4, 5$ (**C**) $-6, -2, 3$ (**D**) $-6, -3, -2$ (**E**) $-5, -4, -3$

A2. Kolikšna je vrednost količnika $(\sqrt{5})^3 : (\sqrt{5})^4$?

(**A**) $\sqrt{5}$ (**B**) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ (**C**) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (**D**) $\frac{1}{5}$

(**E**) nobena od naštetih možnosti

A3. Pet krav popase pašnik v devetih dneh. V kolikšnem času ga popase 18 krav?

(**A**) 9 h (**B**) 36 h (**C**) 48 h 30 min (**D**) 60 h (**E**) 72 h 30 min

A4. Kolikšno vrednost ima izraz $\sqrt{\frac{2009^2-1}{2008} - 2009}$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

A5. Trikotnik, katerega notranja kota merita $40°$ in $50°$, prezrcalimo preko simetrale najdaljše stranice in dobimo nov trikotnik. Oglišča obeh trikotnikov tvorijo trapez. Koliko meri večji kot med diagonalama trapeza?

(**A**) $80°$ (**B**) $90°$ (**C**) $100°$ (**D**) $110°$ (**E**) $120°$

A6. Katero od naštetih števil je največje?

(**A**) 27^{400} (**B**) 4^{600} (**C**) 5^{600} (**D**) 10^{300} (**E**) 2^{1800}

A7. Marko je v tabelo zapisal vsa naravna števila od 2 do 2009 (glej sliko). V kateri stolpec je zapisal število 2009?

(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

A	B	C	D	E
2	3	4	5	
	9	8	7	6
10	11	12	13	
	17	16	15	14
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A8. Na koliko različnih načinov lahko razrežemo kvadrat na 4 skladne like s samimi ravnimi rezi?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) več kot 5

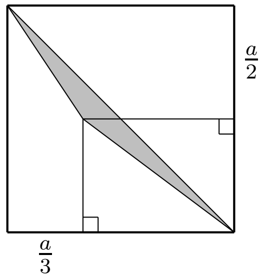
B1. Trgovec je prejel pošiljko knjig. Tretjino je prodal s 26 % dobička, polovico z 18 % dobička, preostale knjige pa s 4 % izgube. Potem, ko je od celotnega izkupička odštel nabavno ceno knjig, mu je ostalo 204 EUR.

a) Kolikšna je bila nabavna cena knjig?

b) Kolikšen odstotek nabavne cene knjig predstavlja knjigarnarjev zaslužek?

(6 točk)

B2. Kolikšen del ploščine kvadrata s stranico a predstavlja ploščina osenčenega trikotnika na sliki?



(6 točk)

B3. Prvi večkotnik ima 3 stranice manj kot drugi in 24 diagonal manj kot drugi. Kolikšna je vsota notranjih kotov prvega večkotnika?

(6 točk)

45. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Področno tekmovanje, 1. april 2009

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA DEVETI RAZRED

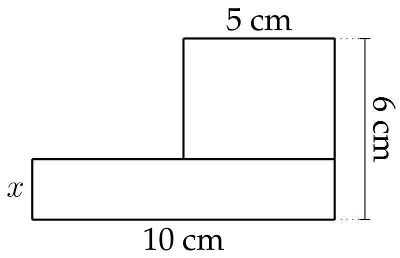
Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Pravokotnika na sliki imata enako ploščino. Koliko meri stranica x?

(**A**) 2 cm (**B**) 2.5 cm (**C**) 3 cm (**D**) 5 cm (**E**) 6 cm

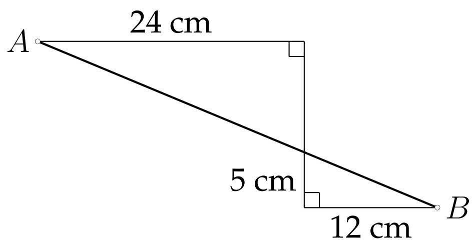


A2. Kolikšna mora biti vrednost števila x, da bo vrednost ulomka $\dfrac{(2x-3)(x+1)+(x-5)}{x^2-7x+10}$ enaka 0?

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) $\frac{3}{2}$ (**D**) -1 (**E**) -2

A3. Koliko meri razdalja AB (glej sliko)?

(**A**) 24 cm (**B**) 27 cm (**C**) 32 cm (**D**) 36 cm (**E**) 39 cm



A4. S katerim izmed navedenih števil je deljivo število, dano z izrazom $7^5 - 7^3 - 4 \cdot 7^4$?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 11 (**E**) 13

A5. Skozi katere kvadrante v koordinatnem sistemu poteka premica z enačbo: $x + \sqrt{2}y = \sqrt{6}$?

(**A**) I., II. in III. (**B**) I., II. in IV. (**C**) II., III. in IV. (**D**) I., III. in IV. (**E**) I. in III.

A6. Oglišča kocke so označena s K, L, M, N, O, P, R in S tako, da ležijo točke K, L, M in S na eni mejni ploskvi, točke L, M, O in R na drugi, točke L, O, P in S pa na tretji mejni ploskvi. Katero oglišče kocke je najbolj oddaljeno od oglišča K?

(**A**) N (**B**) O (**C**) P (**D**) R (**E**) S

A7. Koliko je vsota vseh naravnih števil, ki rešijo enačbo:

$$\frac{(2008-x)(|x|-2007)(2009-2x)+2009}{2009} = 1?$$

(**A**) 2008 (**B**) 3012.5 (**C**) 4015 (**D**) 6024

(**E**) Enačba nima rešitev.

A8. Dolžine robov kvadra s prostornino 56 kubičnih enot so naravna števila. Obseg ene mejne ploskve je 22 enot. Koliko enot je dolg rob, pravokoten na to ploskev?

(**A**) 10 (**B**) 8 (**C**) 7 (**D**) 4 (**E**) 2

B1. Za realni števili x in y velja $x+y=-4$. Izračunaj vrednost izraza $x(x-4)+y(y-4)+2(xy-4)$.

(6 točk)

B2. Za smučarske čevlje in smučarsko jakno bi pred sezonskim znižanjem skupaj plačali 310 EUR. Ceno smučarskih čevljev znižajo za 40 %, ceno jakne pa za 50 %. Kupec tako prihrani 132 EUR. Koliko sta stala posamezna izdelka pred znižanjem?

(6 točk)

B3. Točke M, N in P razdelijo krožnico $\mathcal{K}$ na krožne loke, katerih dolžine so v razmerju $5:6:7$. V točkah M, N in P narišemo tangente na krožnico $\mathcal{K}$. Označimo presečišča teh tangent z A, B in C. Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika ABC.

(6 točk)

45. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 1. april 2009

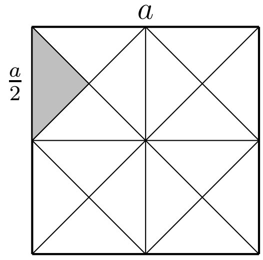
Rešitve za 7. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor pol točke odštejemo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
B	C	D	C	A	E	C	D

Utemeljitve:

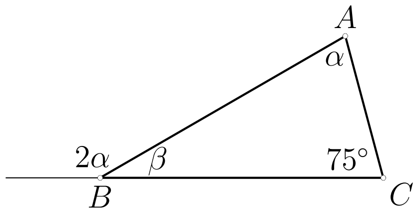
A1. Iščemo število, ki leži med $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$ in $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$. Ker je $\frac{8}{15} = \frac{16}{30}$, $0.7 = \frac{21}{30}$, $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$, $0.2 = \frac{6}{30}$ in $0.9 = \frac{27}{30}$, pogoju ustreza le število 0.7.



A2. Obe dejavnosti obiskuje 18 učencev, 30 učencev obiskuje samo rokometni, 21 učencev pa samo dramski krožek. Torej obiskuje vsaj en krožek $18+30+21 = 69$ učencev, nobenega od teh krožkov pa ne obiskuje $76 - 69 = 7$ učencev.

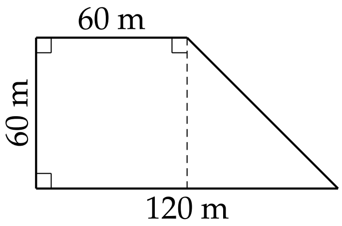
A3. Kvadrat je sestavljen iz 16 takih trikotnikov (glej sliko), kar pomeni, da je ploščina kvadrata 64 cm^2, njegova stranica torej meri 8 cm, obseg pa 32 cm.

A4. Tomaž ima 36 tujih in 9 slovenskih znamk, Peter pa 18 tujih in 27 slovenskih. Peter ima torej 18 slovenskih znamk več kot Tomaž.



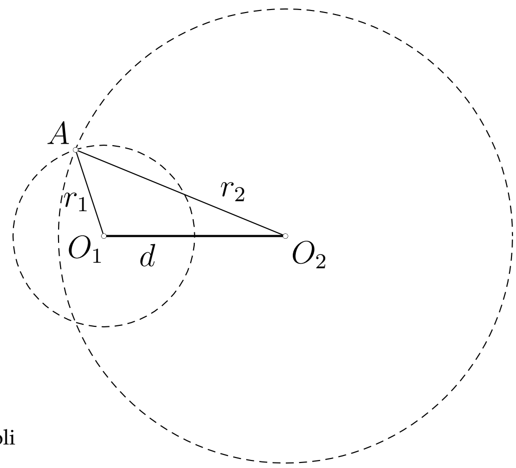
A5. Zunanji kot pri B je enak vsoti notranjih kotov pri drugih dveh ogliščih, torej $\alpha + 75° = 2\alpha$. Sledi $\alpha = 75°$, kar da $\beta = 180° - 2\alpha = 30°$.

A6. Ker je $2009 = 7^2 \cdot 41$, ima 6 deliteljev: 1, 7, 41, $7^2 = 49$, $7 \cdot 41 = 287$ in 2009.



A7. Štirikotnik lahko razdelimo na kvadrat s stranico 60 m in ploščino 3600 m^2 in na polovico kvadrata z enako stranico. Ploščina zemljišča potem meri 5400 m^2 $= 0.54$ ha.

A8. Krožnici polmerov $r_1 = 2$ cm in $r_2 = 5$ cm se bosta sekali, če za razdaljo d med njunima središčema velja $|r_1 - r_2| \leq d \leq r_1 + r_2$. Temu pogoju ustreza le razdalja $d = 4$ cm.



B1. Najprej poenostavimo ulomek

$$\frac{3}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{3}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=\frac{3}{1+\frac{3}{4}}=\frac{3}{\frac{7}{4}}=\frac{12}{7}$$

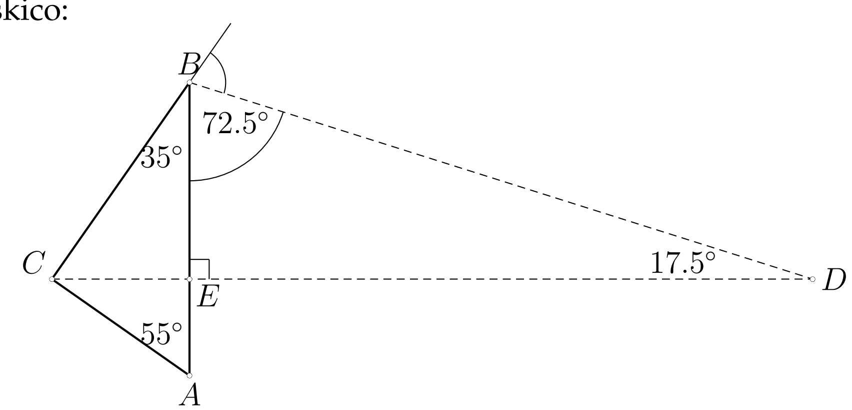
Poiskati moramo še število, ki ga bomo prišteli ulomku $\frac{12}{7}$, da bomo dobili 2.5. Iskano število je razlika med številom 2.5 in ulomkom $\frac{12}{7}$, torej $2.5-\frac{12}{7}=\frac{5}{2}-\frac{12}{7}=\frac{35}{14}-\frac{24}{14}=\frac{11}{14}$.

Vsota ulomkov v spodnjem imenovalcu: $\frac{3}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}$ **............................1 točka**
Obratna vrednost ulomka: $\frac{3}{1+\frac{3}{4}}$ **..1 točka**
Vsota ulomkov v imenovalcu: $\frac{3}{\frac{7}{4}}$ **...1 točka**
Izračunana vrednost ulomka: $\frac{12}{7}$ **...1 točka**
Uporaba razlike: $2\frac{1}{2}-\frac{12}{7}$ **..1 točka**
Rezultat: $\frac{11}{14}$ **..1 točka**

B2. Ko voda izhlapi, je skupna masa akvarija in preostale vode manjša za $\frac{1}{5}$ začetne mase, torej $\frac{1}{5}$ od 35 kg $=7$ kg, kar pomeni, da je izhlapelo 7 kg vode. Teh 7 kg vode predstavlja $\frac{1}{4}$ vse vode na začetku, torej je bilo na začetku štirikrat več vode, kot je je izhlapelo, to je 28 kg vode. Masa akvarija brez vode je 35 kg -28 kg $=7$ kg.

Izračun petine celotne mase: $\frac{1}{5}$ **od** 35 **kg** $=7$ **kg ....1 točka**
Ugotovitev, da je 7 **kg masa** $\frac{1}{4}$ **vode ....2 točki**
Celotna količina vode tehta 28 **kg ....1 točka**
Izračun mase akvarija: 35 **kg** -28 **kg** $=7$ **kg ....1 točka**
Odgovor ....1 točka
Za odgovor šteje vsak nedvoumno označen in pravilno izračunan končni rezultat z zapisano enoto.

B3. Narišimo skico:



Trikotnik ABC je pravokoten ($\gamma=90°$). Naj bo α dani kot $55°$. Potem je $\beta=180°-(\alpha+\gamma)=180°-(55°+90°)=35°$.

Največji zunanji kot je sokot najmanjšemu notranjemu, torej je $\beta'=180°-35°=145°$. Simetrala kota kot razpolavlja, zato je kot med simetralo in hipotenuzo enak $72.5°$.

Naj bo E nožišče višine na najdaljšo stranico (hipotenuzo) v trikotniku ABC. Nosilka te višine je pravokotna na hipotenuzo. Označimo z D presečišče premice CE in simetrale zunanjega kota pri B trikotnika ABC. Dobimo pravokotni trikotnik DBE, v katerem je $\sphericalangle EBD = 72.5^\circ$ in $\sphericalangle BDE = 180^\circ - (90^\circ + 72.5^\circ) = 17.5^\circ$.

Najmanjši notranji kot meri 35° **...1 točka**
Največji zunanji kot meri 145° **...1 točka**
Ugotovitev, da nosilka višine s hipotenuzo oklepa kot 90° **...............1 točka**
Simetrala zunanjega kota s hipotenuzo oklepa kot 72.5° **..................2 točki**
Iskani kot meri: $180^\circ - 90^\circ - 72.5^\circ = 17.5^\circ$ **..................................1 točka**
Za pravilen odgovor šteje tudi zapis kota v obliki $72^\circ 30'$.

Rešitve za 8. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor pol točke odštejemo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A	C	D	B	C	A	B	E

Utemeljitve:

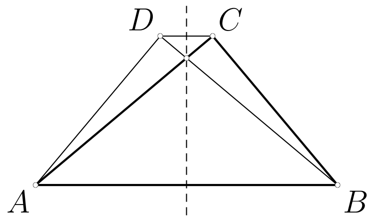
A1. $3^3 + 4^3 + 5^3 = 216$, vse ostale možnosti prinesejo manjšo vsoto kubov.

A2. Rezultat je $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ali $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

A3. Ena krava popase pašnik v 45 dneh ali 1080 urah, torej porabi 18 krav le $\frac{1080}{18} = 60$ ur.

A4. Izračunamo $2009^2 - 1 = (2009-1)(2009+1) = 2008 \cdot 2010$. Korenjenec ima torej vrednost $2010 - 2009 = 1$.

A5. Trikotnik ABC je pravokoten s kotoma $40°$ in $50°$ pri oglišččih A in B. Ko ga prezrcalimo čez simetralo hipotenuze AB, dobimo enakokrak trapez $ABCD$, v katerem diagonali z osnovnico oklepata kot $40°$. Kot med diagonalama AC in BD je potem $180° - 40° - 40° = 100°$.



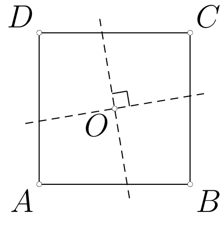
A6. Vsa našteta števila zapišemo v obliki potence z eksponentom 300.

$$
\begin{aligned}
27^{400} &= (3^3)^{400} = 3^{1200} = (3^4)^{300} = 81^{300},\\
4^{600} &= 4^{2\cdot 300} = (4^2)^{300} = 16^{300},\\
5^{600} &= 5^{2\cdot 300} = (5^2)^{300} = 25^{300},\\
10^{300}&,\\
2^{1800} &= 2^{6\cdot 300} = (2^6)^{300} = 64^{300},
\end{aligned}
$$

Največje je število 27^{400}.

A7. V stolpcu A so števila, ki so oblike $8k+2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ker je $2009 = 251 \cdot 8 + 1$, je za eno manjše od števil v prvem stolpcu in zato je napisano v stolpcu B.

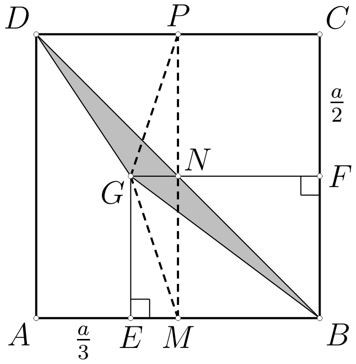
A8. Možnosti je neskončno – že vsak par pravokotnih rezov skozi središče kvadrata ga razdeli na štiri skladne dele:



B1. Trgovec je z zaslužkom prodal $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ vseh knjig, torej je z izgubo prodal $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ vseh knjig. Označimo z x nabavno ceno vseh knjig in izračunamo zaslužek $\frac{1}{3}x\cdot 0.26+\frac{1}{2}\cdot 0.18-\frac{1}{6}x\cdot 0.04=0.17x$, kar pomeni, da je trgovec zaslužil 17 % nabavne cene knjig. Ker je $0.17x=204$ EUR, znaša nabavna cene $x=1200$ EUR.

Izračun ostanka: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$**,** $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ **.......................................1 točka**
Zapis zaslužka za posamezno skupino: $\frac{1}{3}x\cdot 0.26$**,** $\frac{1}{2}x\cdot 0.18$**,** $-\frac{1}{6}x\cdot 0.04$ **.....1 točka**
(*Za točko zadošča že eden od teh treh zapisov.)*
Izračun zaslužka: $\frac{1}{3}x\cdot 0.26+\frac{1}{2}\cdot 0.18-\frac{1}{6}x\cdot 0.04=0.17x$ **....................1 točka**
Zveza: $0.17x=204$ **...1 točka**
Rešitev: $x=1200$ **EUR ....1 točka**
Zaslužek predstavlja $204/1200=17$ **% vrednosti knjig ....1 točka**

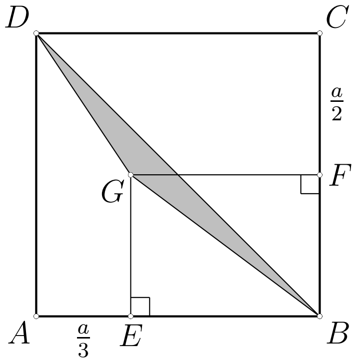
B2. 1. način Ploščina osenčenaga trikotnika BDG je enaka ploščini trikotnika GMP, saj lahko trikotnik BDG sestavimo iz dveh trikotnikov, GBN in GND, ta dva trikotnika pa imata skupno osnovnico GN in višino, katere dolžina je enaka $\frac{a}{2}$.



Ker je $|GN|=\frac{2a}{3}-\frac{a}{a}=\frac{a}{6}$, je zato ploščina trikotnika GMP enaka $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{6}\cdot a=\frac{1}{12}a^2$.

Ugotovitev, da je $p_{BDG}=p_{GMN}+p_{GNP}$**: ....1 točka**
Ugotovitev, da je $|MN|=|NP|=\frac{a}{2}$**: ....1 točka**
Izračun $|GN|=\frac{a}{6}$**: .... 2 točki**
Ploščina trikotnika GMP**:** $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{6}\cdot a=\frac{1}{12}a^2$ **................................1 točka**
Razmerje: $\frac{\frac{a^2}{12}}{a^2}=\frac{1}{12}=8.33$ **% (za zapis rešitve zadostuje** $\frac{1}{12}$**) ....1 točka**
Ker sta trikotnika GNP in MEG skladna, je ploščina trikotnika GMP enaka ploščini pravokotnika $EMNG$, torej enaka $|GN|\cdot|MN|=\frac{a}{6}\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{12}a^2$.

2. način Narišimo skico:



Ploščino trikotnika BDG dobimo tako, da od ploščine celotnega kvadrata (a^2) odštejemo: ploščino pravokotnega trikotnika BCD s katetama a, to je $\frac{a^2}{2}$ (oziroma ploščino polovice kvadrata); ploščino trapeza $AEGD$, ki ga sestavljata pravokotnik s stranicama $\frac{a}{2}$ in $\frac{a}{3}$ in pravokotni trikotnik z enakima stranicama, to je $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} + \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}}{2} = \frac{a^2}{4}$; ploščino pravokotnega trikotnika EBG s katetama $\frac{2}{3}a$ in $\frac{a}{2}$, to je $\frac{\frac{2}{3}a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{6}$. Ploščina osenčenega trikotnika je $\frac{a^2}{12}$. Razmerje med ploščino kvadrata in ploščino osenčenega trikotnika pa je $\frac{\frac{a^2}{12}}{a^2} = \frac{1}{12} = 8.33$ %

Ploščina trikotnika BCD**:** $\frac{a^2}{2}$ **...1 točka**
Ploščina trikotnika EBG**:** $\frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3}}{2} = \frac{a^2}{6}$ **.......................................1 točka**
Ploščina trapeza $AEGD$**:** $\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$ **................................1 točka**
Ploščina osenčenega trikotnika BDG**:** $\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$ **..................2 točki**
Razmerje: $\frac{\frac{a^2}{12}}{a^2} = \frac{1}{12} = 8.33$ **% (za zapis rešitve zadostuje** $\frac{1}{12}$**) ....1 točka**

B3. Število diagonal v n-kotniku je enako $\frac{n(n-3)}{2}$. V drugem večkotniku, ki ima $n+3$ stranic, pa je število diagonal enako $\frac{(n+3)((n+3)-3)}{2} = \frac{(n+3)n}{2}$. Števili diagonal se razlikujea za $\frac{(n+3)n}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 3n$. To pomeni, da je $3n = 24$, $n = 8$ in prvi večkotnik je osemkotnik. Izračunamo še vsoto notranjih kotov osemkotnika: $(n-2) \cdot 180° = 6 \cdot 180° = 1080°$.

Formula za število diagonal: $\frac{n(n-3)}{2}$ **.......................................1 točka**
Zapis števila diagonal v drugem večkotniku: $\frac{(n+3)n}{2}$ **......................1 točka**
Izračunana razlika med številoma diagonal: $3n$ **..........................1 točka**
Izenačitev: $3n = 24$ **...1 točka**
Rešitev: $n = 8$ **...1 točka**
Vsota kotov v osemkotniku je $1080°$ **.....................................1 točka**

Rešitve za 9. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor pol točke odštejemo.

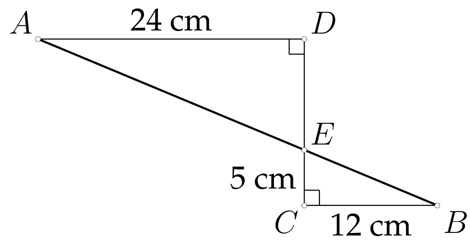
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A	E	E	B	B	B	C	E

Utemeljitve:

A1. Ploščini pravokotnikov sta $10x$ in $5(6-x)$. Torej je $x=2$.

A2. V števcu dobimo izraz $2(x-2)(x+2)$, v imenovalcu pa $(x-2)(x-5)$. Enačbo reši $x=-2$.

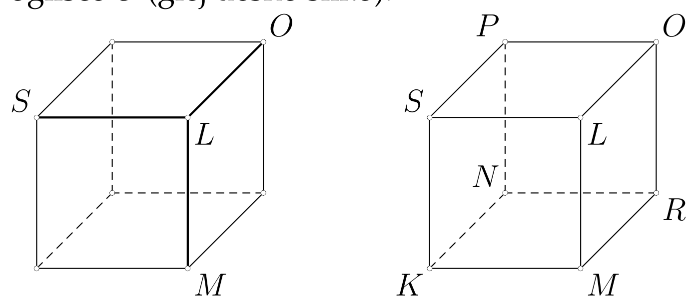
A3. Pravokotna trikotnika ADE in BCE sta podobna. Ker je $|AD|:|BC|=1:2$, je tudi $|AE|=2|BE|$. Ker je $|BE|=\sqrt{|CB|^2+|CE|^2}=13$ cm, je zato $|AB|=|AE|+|BE|=3|BE|=39$ cm.



A4. Izračunamo: $n=7^5-7^3-4\cdot 7^4=7^3(49-1-28)=20\cdot 7^3=2^2\cdot 5\cdot 7^3$. Izmed navedenih števil le število 5 deli število n.

A5. Enačbo premice preoblikujemo v eksplicitno obliko $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{3}$. Premica s pozitivno začetno vrednostjo in negativnim smernim koeficientom poteka skozi drugi, prvi in četrti kvadrant.

A6. Omenjene tri mejne ploskve kocke imajo skupno oglišče L ter skupne robove LM, LO in LS (glej levo sliko). Ker ležijo točke K, L, M in S na eni mejni ploskvi, je od oglišča K najbolj oddaljeno oglišče O (glej desno sliko).



A7. Enačbo preoblikujemo v : $(2008-x)(|x|-2007)(2009-2x)=0$. Njeni naravni rešitvi sta 2008 in 2007.

A8. Izračunamo: $a\cdot b\cdot c=56=7\cdot 2^3$. Ena od stranic a ali b meri 7 enot, druga potem 4 enote in iskana stranica 2 enoti.

B1. 1. možnost:

V izrazu najprej odpravimo oklepaje: $x^2-4x+y^2-4y+2xy-8$. Členi $x^2+2xy+y^2$ tvorijo popolni kvadrat $(x+y)^2=(-4)^2=16$, pri preostalih treh členih izpostavimo $-4(x+y+2)=-4(-4+2)=8$. Vrednost izraza je potem $16+8=24$.

Odprava oklepajev: $x^2-4x+y^2-4y+2xy-8$ .... **1 točka**
$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ .... **1 točka**
$-4x-4y=-4(x+y)$ .... **1 točka**
$(x+y)^2=16$ .... **1 točka**
$-4(x+y)=16$ .... **1 točka**
Rezultat: $16+16-8=24$ .... **1 točka**

2. možnost:

Iz pogoja $x+y=-4$, sledi $y=-4-x$. Namesto y vstavimo v izraz $-4-x$ in dobljeni izraz poenostavimo

$$x(x-4)+(-4-x)((-4-x)-4)+2(x(-4-x)-4)=$$

$$x(x-4)+(-4-x)(-8-x)+2(-4x-x^2-4)=$$

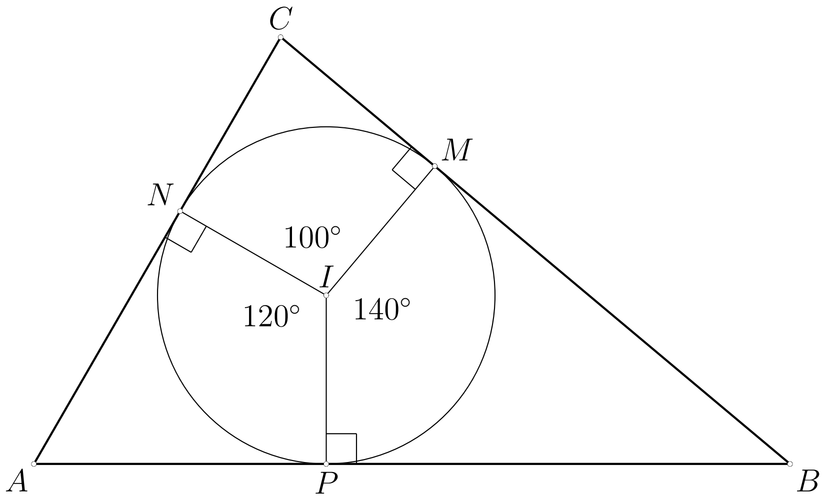
$$x^2-4x+32+4x+8x+x^2-8x-2x^2-8=24.$$

Zapis zveze med x in y, npr.: $y=-4-x$ .... **1 točka**
Vstavitev v izraz: $x(x-4)+(-4-x)((-4-x)-4)+2(x(-4-x)-4)$ .... **1 točka**
Poenostavitev izraza: $x(x-4)+(-4-x)(-8-x)+2(-4x-x^2-4)=x^2-4x+32+4x+8x+x^2-8x-2x^2-8$ .... **(1 + 1) točka**
Pravilno izračunan rezultat: 24 .... **2 točki**

B2. Označimo z x ceno smučarskih čevljev in z y ceno smučarske jakne pred znižanjem. Potem velja $x+y=310$ EUR. Ceno čevljev so znižali za 40 %, zato kupec prihrani 40 % od $x=0.4x$, ceno jakne pa za 50 %, kar pomeni 50 % od $y=0.5y$ prihranka. Skupni prihranek je enak $0.4x+0.5y=132$ EUR. Tako dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama. Rešitvi tega sistema sta $x=230$ in $y=80$. Cena čevljev pred razprodajo je bila 230 EUR, jakne pa 80 EUR.

Z x označimo prvotno ceno čevljev, z y pa prvotno ceno jakne
Upoštevanje: $x+y=310$ .... **1 točka**
Prihranek: $0.4x+0.5y=132$ .... **2 točki**
Prehod na enačbo z eno neznanko, npr. $0.4x+0.5(310-x)=132$ .... **1 točka**
Rešitev $x=230$ .... **1 točka**
Odgovor: Čevlji so pred znižanjem stali 230 **evrov, jakna pa je stala** 80 **evrov.** ..**1 točka**

B3. Narišimo skico:



Označimo oglišča nastalega trikotnika z A, B in C. Vidimo, da polmeri razdelijo polni kot z vrhom v središču na tri središčne kote, katerih velikosti so v enakem razmerju kot dolžine krožnih lokov nad temi koti. Velja $5x + 6x + 7x = 360°$, iz česar sledi $x = 20°$, velikosti posameznih kotov pa $100°$, $120°$ in $140°$.

Polmeri razdelijo trikotnik ABC na tri štirikotnike, ki imajo po dva prava kota.

Oglejmo si štirikotnik $CNIM$. Njegovi notranji koti so $\sphericalangle MIN = 100°$, $\sphericalangle INC = \sphericalangle CMI = 90°$ in $\sphericalangle NCM = 360° - (100° + 2 \cdot 90°) = 80°$.

Podobno izračunamo še $\sphericalangle BAC = 360° - 2 \cdot 90° - 120° = 60°$ in $\sphericalangle CBA = 360° - 2 \cdot 90° - 140° = 40°$.

Koti v trikotniku ABC merijo $80°$, $60°$ in $40°$.

Zapis velikosti središčnih kotov $5x$**,** $6x$**,** $7x$ **................................ 1 točka**
Zapis: $5x + 6x + 7x = 360°$ **.. 1 točka**
Izračun $x = 20°$ **in kotov** $100°$, $120°$, $140°$ **................................... 1 točka**
Upoštevanje pravokotnosti polmerov na stranice trikotnika ABC**: .... 1 točka**
Izračun notranjega kota pri C **v štirikotniku** $CNIM$ **(ali kota pri** A **v štirikotnikih** $APIN$ **ali kota pri** B **v štirikotniku** $PBMI$**): .... 1 točka**
Rešitev: Koti v dobljenem trikotniku merijo $80°$**,** $60°$ **in** $40°$ **................ 1 točka**