Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

45. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Idrija, 12. maja 2001

NALOGE ZA PRVI LETNIK

1. Naj bodo k, m in n poljubna naravna števila, ki niso deljiva s 5. Dokaži, da je vsaj eno izmed števil $k^2 - m^2$, $m^2 - n^2$ in $n^2 - k^2$ deljivo s 5.

2. Tina je na pet listkov zapisala po eno naravno število, a ni hotela izdati, katera števila je zapisala. Prebrisani Žan jo je prepričal, da mu je povedala vse vsote po dveh števil. Zvedel je, da so bile vsote 17, 20, 28, 14, 42, 36, 28, 39, 25 in 31. Katera števila je zapisala Tina?

3. Dana je daljica AB. Na tej daljici izberimo poljubno točko P, različno od A in B, ter konstruirajmo enakokraka pravokotna trikotnika APQ in PBR, katerih vrhova Q in R ležita na istem bregu premice skozi A in B. Naj bo točka M razpolovišče daljice QR. Dokaži, da oddaljenost točke M od premice skozi A in B ni odvisna od izbire točke P.

4. Andraž in Breda sta iz časopisa odrezala dva dolga trakova dolžin a in b, da bi se z njima igrala. Pri tej igri odreže igralec, ki je na vrsti, od poljubnega traku kos dolžine d. Igro izgubi igralec, ki prvi ne more odrezati kosa dolžine d. Andraž kot kavalir prepusti Bredi, da začne igro. Ugotovi, kako dolžini trakov vplivata na to, kdo bo zmagal.

Naloge rešujte samostojno. Čas reševanja: $3\frac{1}{2}$ ure.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

45. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Idrija, 12. maja 2001

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

1. Poišči vsa naravna števila a, b in c, ki zadoščajo enačbi

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a},$$

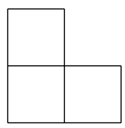
in za katere velja, da je $ab + ac + bc$ praštevilo.

2. Za poljubno naravno število n označimo s $p(n)$ produkt števk tega naravnega števila, zapisanega desetiško. Izračunaj vsoto

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(2001).$$

3. Naj bosta E in F taki notranji točki na stranici AB pravokotnika $ABCD$, da je $|AE| = |EF|$. Pravokotnica na AB skozi točko E seka diagonalo AC v točki G, daljici FD in BG pa se sekata v točki H. Dokaži, da imata trikotnika FBH in GHD enaki ploščini.

4. Določi najmanjše število polj na tabli razsežnosti 8×8, ki jih moramo pobarvati, da bo na vsakem kosu tabele v obliki črke L (glej sliko) vsaj eno polje pobarvano.



Naloge rešujte samostojno. Čas reševanja: $3\frac{1}{2}$ ure.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

45. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Idrija, 12. maja 2001

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

1. (a) Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

   (b) Dokaži, da je celi del izraza

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2}},$$

   kjer je m naravno število, enak $2m-2$ ali $2m-1$.

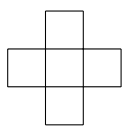
2. Poišči vsa racionalna števila r, za katera so vse rešitve enačbe

$$rx^2 + (r+1)x + r = 1$$

   cela števila.

3. Na stranici BC ostrokotnega trikotnika ABC leži taka točka D, da je $|AB| = |AD|$. Naj bo E taka točka na višini iz C trikotnika ABC, da se krožnica $\mathcal{K}_1$ s središčem v E dotika premice AD v točki D. Označimo s $\mathcal{K}_2$ krožnico skozi C, ki se dotika premice AB v točki B. Dokaži, da leži točka A na premici, ki poteka skozi presečišči krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$.

4. Tabla razsežnosti 8×8 je razdeljena na 64 enotskih kvadratkov. Domine v obliki znaka + (glej sliko) polagamo na tablo tako, da se njihove notranjosti ne sekajo, robovi domin se prekrivajo z robovi ustreznih enotskih kvadratkov, domine same pa v celoti ležijo na tabli. Največ koliko domin lahko položimo na tablo na tak način?



Naloge rešujte samostojno. Čas reševanja: $3\frac{1}{2}$ ure.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

45. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Idrija, 12. maja 2001

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

1. Naj bodo a, b, c, d, e in f taka pozitivna realna števila, da je zaporedje a, b, c, d aritmetično, zaporedje a, e, f, d pa geometrično. Dokaži, da velja
$$bc \geq ef.$$

2. Poišči vsa praštevila p, za katera je število $3^p - (p+2)^2$ praštevilo.

3. Naj bo D nožišče višine na stranico BC trikotnika ABC. Simetrala notranjega kota pri C seka nasprotno stranico v točki E. Koliko meri kot $\sphericalangle EDB$, če je $\sphericalangle CEA = \frac{\pi}{4}$?

4. Naj bo $n \geq 4$. Oštevilčimo n točk na krožnici s številkami od 1 do n. Rečemo, da sta nesosednji točki, oštevilčeni z a in b, *pravilen par*, če so vsaj na enem izmed lokov, ki ju določata a in b, vse točke ostevilčene s števili, manjšimi od a in b. Dokaži, da je število pravilnih parov enako $n-3$.

Naloge rešujte samostojno. Čas reševanja: $3\frac{1}{2}$ ure.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

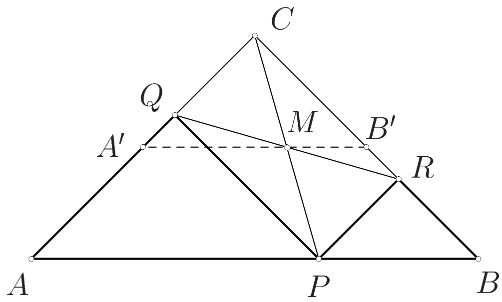
REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA

I/1. Ker števila k, m in n niso deljiva s 5, so oblike $5t \pm 1$ ali $5t \pm 2$. Iz $(5t \pm 1)^2 = 5t' + 1$ in $(5t \pm 2)^2 = 5t' + 4$ pa vidimo, da imajo števila k^2, m^2 in n^2 le dva možna ostanka pri deljenju s 5. Torej je vsaj ena izmed razlik $k^2 - m^2$, $m^2 - n^2$ in $n^2 - k^2$ deljiva s 5.

I/2. Označimo števila z a, b, c, d in e. Predpostavimo lahko, da velja $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Uredimo vsote po velikosti: 14, 17, 20, 25, 28, 28, 31, 36, 39, 42. Gotovo je $a + b = 14$, $a + c = 17$, $d + e = 42$ in $c + e = 39$. Če seštejemo vse vsote, se vsako od števil pojavi v tej vsoti natanko štirikrat, zato je $4(a + b + c + d + e) = 280$ ali $a + b + c + d + e = 70$. Ker je $a + b = 14$ in $d + e = 42$, je $c = 14$. Sedaj ni težko poiskati še drugih štirih števil, tako da je rešitev: 3, 11, 14, 17, 25.

I/3. Nalogo bomo rešili nekoliko splošneje. Privzeli bomo, da sta APQ in PBR podobna enakokraka trikotnika (z vrhoma Q oz. R).

Označimo s C presečišče premic AQ in BR. Potem je $QPRC$ paralelogram in M razpolovišče njegovih diagonal. Če sedaj označimo z A' in B' razpolovišči daljic AC in BC, leži točka M na daljici $A'B'$. Trditev je tako dokazana, saj je $A'B' \parallel AB$, točke A', B' in C pa so neodvisne od izbire točke P.



I/4. Iz traku dolžine a lahko zaporedoma odrežemo $[\frac{a}{d}]$ kosov dolžine d, iz traku dolžine b pa $[\frac{b}{d}]$ kosov dolžine d. Igre bo torej konec po $n = [\frac{a}{d}] + [\frac{b}{d}]$ potezah. Ker začne igrati Breda, dela lihe reze, Andraž pa sode. Torej, če je število n liho, bo zmagala Breda, ki bo naredila zadnji rez, če pa je število rezov sodo, bo zmagal Andraž.
Opomba. Z $[x]$ označimo največje celo število, ki ne presega realnega števila x; npr. $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$.

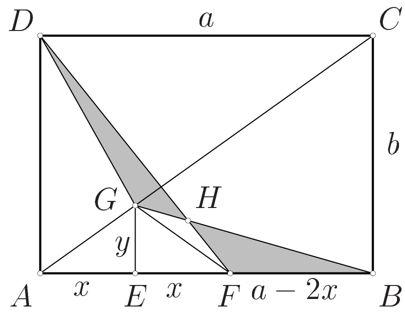
II/1. Označimo praštevilo $ab + bc + ca$ s p. Iz zveze dobimo, da je $(a + b)^2 = c^2 + p$ oziroma $p = (a + b - c)(a + b + c)$. Ker je p praštevilo in je $0 < a + b - c < a + b + c$, mora biti $a + b - c = 1$ in $a + b + c = p$ oziroma $c = \frac{p-1}{2}$ in $a + b = \frac{p+1}{2}$. Po drugi strani pa mora biti $ab = p - bc - ca = p - c(a + b) = p - \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} = -\frac{p^2-4p-1}{4}$ pozitivno število. Ničli kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 4x - 1$, ki ima pozitiven vodilni koeficient, sta $2 - \sqrt{5}$ in $2 + \sqrt{5} < 5$, torej je p lahko le 2 ali 3. Ker 2 ne more biti, saj $c = \frac{p-1}{2}$ ne bi bilo celo število, je $p = 3$. Tako je $c = 1$, $a + b = 2$ in ker sta a in b naravni števili, je edina rešitev $a = b = c = 1$. Trojica $(1, 1, 1)$ seveda ustreza vsem pogojem naloge.

II/2. Izračunamo $p(1) + p(2) + \cdots + p(9) = 45$. Če označimo s k stotice in z j desetice, potem je

$$\begin{aligned} p(j0) + p(j1) + \cdots + p(j9) &= j \cdot 45, \\ p(kj0) + p(kj1) + \cdots + p(kj9) &= k \cdot j \cdot 45 \text{ in} \\ p(1kj0) + p(1kj1) + \cdots + p(1kj9) &= k \cdot j \cdot 45. \end{aligned}$$

Sledi $p(1)+\cdots+p(99)+p(100)+\cdots+p(999)+p(1000)+\cdots+p(1999)+p(2000)+p(2001) = 45(1+1+2+\cdots+9)+45(1+2+\cdots+9)(1+2+\cdots+9)+45(1+2+\cdots+9)(1+2+\cdots+9)+0+0 = 184320.$

II/3. Naj p_{XYZ} označuje ploščino trikotnika XYZ. Računajmo



$$\begin{aligned} p_{DGH} - p_{HFB} &= (p_{DAF} - p_{DAG} - p_{AEG} - p_{EFG} - p_{GFH}) \\ &\quad -(p_{EBG} - p_{EFG} - p_{GFH}) = \\ &= p_{DAF} - p_{DAG} - p_{AEG} - p_{EBG}. \end{aligned}$$

Označimo z $a = |AB|$, $b = |BC|$, $x = |AE| = |EF|$ in $y = |EG|$. Sledi

$$\begin{aligned} p_{DAF} - p_{DAG} - p_{AEG} - p_{EBG} &= bx - \tfrac{1}{2}bx - \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}(a-x)y = \\ &= \tfrac{1}{2}(bx - ay) = 0, \end{aligned}$$

saj zaradi podobnosti trikotnikov AEG in ABC velja $x : y = a : b$.

II/4. Najmanjše število polj, ki jih moramo pobarvati, je 32. Tablo najprej razdelimo na 16 kvadratov s po 4 polji. Če bi pobarvali samo 31 polj table, potem je vsaj v enem od teh kvadratov največ eno polje pobarvano. V tem kvadratu je potem lik oblike črke L brez pobarvanih polj. Če pobarvamo tablo kot šahovnico, pa vidimo, da 32 pobarvanih polj zadošča.

III/1. (a) Ko neenakost $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pomnožimo s $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, dobimo $1 < \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$, kar očitno drži. Ko pa neenakost $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ pomnožimo s $\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, dobimo $\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} < 1$, kar spet očitno drži.

(b) Označimo $S = \sum_{n=1}^{m^2} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ko seštejemo vse neenakosti

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

od $n = 1$ do $n = m^2$, dobimo

$$\sqrt{m^2+1} - \sqrt{1} < \frac{1}{2}S < \sqrt{m^2} - \sqrt{1-1}$$

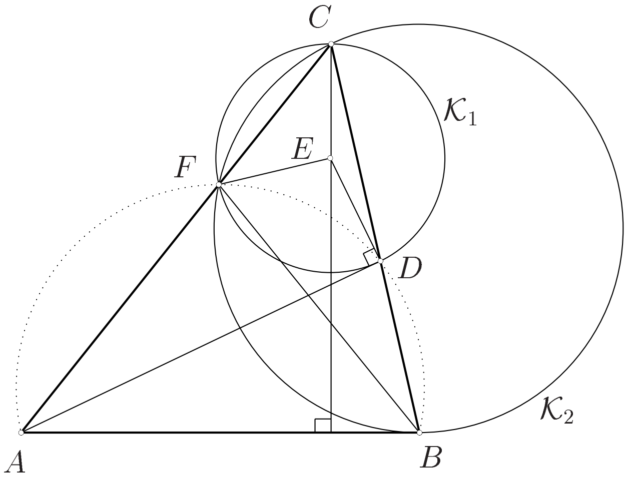
in od tod

$$2(\sqrt{m^2+1} - 1) < S < 2m.$$

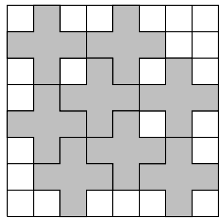
Ker je $2m - 2(\sqrt{m^2+1} - 1) = 2(m - \sqrt{m^2+1} + 1) < 2$, velja ocena $2m - 2 < S < 2m$. Torej za celo število S velja $2m - 2 \leq [S] < 2m$ oz. $[S] \in \{2m-2, 2m-1\}$.

III/2. Pišimo $r = \frac{a}{b}$, kjer sta a in b tuji števili, $a > 0$, in predpostavimo, da ima enačba celoštevilske rešitve. Dobimo $ax^2 + (a+b)x + (a-b) = 0$, od koder sledi $a \mid (a-b)$, zato je $a = 1$. Da bi imela kvadratna enačba $x^2 + (1+b)x + (1-b) = 0$ kakšno celoštevilsko rešitev, mora biti njena diskriminanta popolni kvadrat. Torej $(b+3)^2 - 12 = c^2$, kar lahko preoblikujemo v $(b+3-c)(b+3+c) = 12$. Ker sta števili $b+3-c$ in $b+3+c$ iste parnosti, sta $2 \cdot 6 = 12 = (-2) \cdot (-6)$ edina možna razcepa. Sledi $b = -3 \pm 4 \in \{1, -7\}$. Za $b = 1$ imamo enačbo $x^2 + 2x = 0$, ki ima celoštevilski rešitvi $x = 0$ in $x = -2$, za $b = -7$ pa dobimo enačbo $x^2 - 6x + 8$, ki ima celoštevilski rešitvi $x = 4$ in $x = 2$. Torej sta $r = 1$ in $r = -\frac{1}{7}$ edini rešitvi.

III/3. Narišimo dovolj veliko skico in privzemimo običajne oznake kotov trikotnika ABC. Označimo presečišče krožnice $\mathcal{K}_2$ z daljico AC z F. Kot med tetivo FB in tangento AB je enak obodnemu kotu nad to tetivo. Sledi $\sphericalangle FBA = \gamma$, kar nam da $\sphericalangle AFB = \beta$. Torej je $ABDF$ tetivni štirikotnik in $\sphericalangle DFC = \beta$. Po definiciji krožnice $\mathcal{K}_1$ je $ED \perp AD$, zato $\sphericalangle EDC = \pi/2 - \beta = \sphericalangle ECD$. Krožnica $\mathcal{K}_1$ torej poteka skozi točko C in $\sphericalangle DEC = 2\beta$. Zaradi $\sphericalangle DFC = \beta$ je $F \in \mathcal{K}_1$. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se tako sekata v točkah F in C, točka F pa po konstrukciji leži na AC.



III/4. Očitno sta ob vsakem robu table kvečjemu dva enotska kvadratka prekrita. Torej je lahko v celoti prekritih največ $4 \cdot 2 + 6 \cdot 6 = 44$ enotskih kvadratkov. Ker vsaka domina prekrije 5 enotskih kvadratkov, lahko na tablo postavimo največ $\frac{44}{5} < 9$ domin. Slika na desni pa kaže, da 8 domin res lahko postavimo.



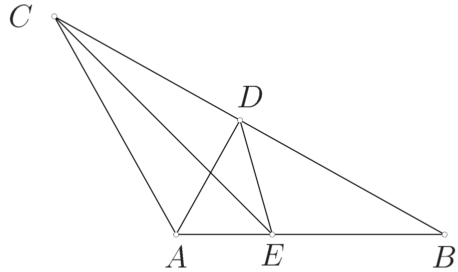
IV/1. Ker je a, b, c, d aritmetično zaporedje, velja $b = a + \frac{1}{3}(d-a)$ in $c = a + \frac{2}{3}(d-a)$. Podobno je $e = a(\frac{d}{a})^{1/3}$ in $f = a(\frac{d}{a})^{2/3}$. Sledi

$$bc - ef = (\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}d)(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{2}{3}d) - a^2\tfrac{d}{a} = \tfrac{2}{9}(a-d)^2 \geq 0.$$

IV/2. Za $p = 2$ je število $3^2 - 4^2$ negativno. Če je p liho število, je $3^p - (p+2)^2$ sodo; torej enako 2. Enačba $3^p - (p+2)^2 = 2$ ima očitno rešitev $p = 3$. Da ni drugih, dokažemo z indukcijo.

Natančneje: Z indukcijo dokažemo, da za $n > 3$ velja $3^n - (n+2)^2 > 2$ oziroma $3^n > n^2 + 4n + 6$. Pri $n = 4$ ocena velja, v dokazu induktivnega koraka pa induktivni hipotezi $3^n > n^2 + 4n + 6$ prištejemo neenakost $2 \cdot 3^n > 2n + 5$ (velja za $n \geq 2$) in dobimo $3^{n+1} > (n+1)^2 + 4(n+1) + 6$. (Dokaz neenakosti $2 \cdot 3^n > 2n + 5$ za $n \geq 2$ s pomočjo indukcije prepustimo bralcu.)

IV/3. Označimo kote trikotnika z α, β in γ na običajen način. V trikotniku AEC velja $\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} = \pi$, od koder z upoštevanjem $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ izpeljemo $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$.
Ker je $AD \perp DB$, je $\frac{|AD|}{|DB|} = \operatorname{tg}\beta$. Ker je CE simetrala kota, je $|AE| : |EB| = |AC| : |BC|$. Po sinusnem izreku je $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta$. Torej je $|AE| : |EB| = |AD| : |DB|$ in je ED simetrala pravega kota $\sphericalangle ADB$, zato je $\sphericalangle EDB = \frac{\pi}{4}$.



IV/4. Nalogo bomo dokazali z indukcijo. Dokaz začnemo pri $n = 4$. Sosedi od točke 1 sta pravilen par. Edini drug kandidat vsebuje točko 1, ki pa nikoli ni v pravilnem paru. Torej imamo le en pravilen par.

Recimo, da formula velja za n. Oglejmo si $n + 1$ točk na krožnici. Označimo sosedi točke 1 z a in b. Par (a, b) je očitno pravilen par. Sedaj pa izbrišimo točko 1 in vsem ostalim številom odštejmo 1. Dobimo n točk. Ker točka 1 ni bila v nobenem pravilnem paru, vsi pravilni pari razen (a, b), ki sta sedaj sosedi, ostanejo. Torej imamo pri $n + 1$ točkah natanko en pravilen par več kot pri n točkah.