**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

7. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2007

Naloge za 1. letnik

1. Poišči tri števila, za katera velja: vsota prvih dveh je enaka tretjemu, dvakratnik tretjega števila je za tri večji od prvega, dvakratnik vsote prvih dveh števil pa je za pet večji od tretjega števila.

2. Skrči izraz $\dfrac{1+9a^{-1}+20a^{-2}}{1+8a^{-1}+16a^{-2}} \cdot (a^2+4a) \cdot (1-25a^{-2})^{-1}$.

3. V nekem podjetju so izdelovali igrače. Dobili so naročilo, ki bi ga 20 delavcev opravilo v 90 dneh. Ker je bil čas poletnih počitnic in dopustov, je prvih 40 dni delalo 10 delavcev. Tedaj so ugotovili, da z delom zamujajo, zato so takoj zaposlili še 40 delavcev. Koliko dni so potrebovali, da so izpolnili naročilo? Za koliko dni so zamudili oziroma prehiteli rok 90 dni?

4. Poišči ulomek z imenovalcem 20, katerega vrednost je med $-\frac{5}{13}$ in $-\frac{4}{13}$.

5. Ko so prodajalko vprašali, koliko šopkov vijolic ima v košari, je rekla: ″Če jemljem iz košare po 2 šopka, mi 1 ostane. Tudi če jemljem po 3 ali pa po 4 šopke, mi 1 ostane. Če jemljem po 7 šopkov, mi ne ostane nobeden. Zagotovo vem, da jih je manj kot 100.″ Koliko šopkov vijolic je imela prodajalka v košari?

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

7. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2007

Naloge za 2. letnik

1. Kateta a pravokotnega trikotnika je dvakrat toliko dolga kot kateta b. Izračunaj velikost večjega ostrega kota na stotinko stopinje natančno. Zapiši razmerje dolžin stranic trikotnika.

2. Za katere vrednosti parametra a je funkcija $f(x) = a(x+1) + 2(x-3)$ naraščajoča, njen graf pa seka ordinatno os pod koordinatnim izhodiščem?

3. Pokaži:

   a) vrednost izraza $\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{4}$ je naravno število,

   b) za vsako naravno število x je število $64^{-1} \cdot 8^{2x+4} - 24 \cdot 64^{x} + 4 \cdot 32^{x} \cdot 2^{x+3}$ deljivo s številom $\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{4}$.

4. Premica, dana z enačbo $2ax + 4y - 6 = 0$, omejuje s koordinatnima osema trikotnik s ploščino $4{,}5$. Koliko je lahko a?

5. Stranica AD trapeza $ABCD$ je pravokotna na osnovnici AB in CD. Dolžine stranic tega trapeza so: $|AB| = 2$ cm, $|CD| = 8$ cm in $|AD| = 10$ cm. Izračunaj oddaljenost presečišča diagonal S od osnovnice AB.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

7. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2007

Naloge za 3. letnik

1. Predpis $r(t) = 14e^{0{,}014t}$ pove, koliko milijonov rib neke vrste bi bilo v severnem morju po t letih od začetka načrtnega gojenja.

   a) Koliko milijonov rib bi bilo po 5 letih od začetka gojenja?

   b) Po koliko letih bi število rib preseglo 40 miljonov? Rezultat zaokroži na celo število let.

2. Reši enačbo $\log_3(\log_2 x + 12) + 2 = 4$ in rešitev zapiši v obliki ulomka.

3. Naj bo $m \neq 0$. Kolikšna je najmanjša vrednost funkcije

   $$f(x) = \frac{1+m^2}{m^2}x^2 - 2 \cdot \frac{1+m^2}{m}x - 1.$$

   Zapiši odgovor.

4. V valjasti posodi z notranjim premerom 24 cm je voda. Gladina vode je 5 cm od gornjega roba posode. Kaja želi potopiti kvader z dolžino 16 cm, širino 12 cm in višino 12 cm v vodo, ne da bi kaj vode odteklo iz posode. Ali lahko to napravi? Odgovor utemelji.

5. Realna števila a, b in c, za katera je $1 < a < b < c$ in $c - b \neq 1$, so dolžine stranic trikotnika in zadoščajo pogoju $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$. Pokaži, da je trikotnik pravokoten.

   NAMIG: Uporabi prehod k novi osnovi.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

7. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2007

Naloge za 4. letnik

1. Poenostavi izraz $(\sin 2x - 2\cos x)\dfrac{\tan x}{1-\sin^2 x}\cdot(1+\sin x)$.

2. Dokaži, da je polinom $p(x) = (x-2)^{100} + (x-1)^{50} - 1$ deljiv s polinomom $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

3. Za katere vrednosti spremenljivke x je vrednost funkcije
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x}\right)$$
negativna?

4. Tomi je z neke višine spustil gumijasto žogico na trdo podlago. Po vsakem odboju je dosegla $\frac{3}{4}$ prejšnje višine. Žogica se je od tal odbila štirikrat. V trenutku, ko je padla petič na tla, jo je sosedov Jani zaplenil. S kolikšne višine je Tomi spustil žogico, če je ta naredila 653 cm dolgo pot? Zapiši odgovor.

5. Tina je pet let zaporedoma v začetku leta vložila 500 evrov na banko, ki letno kapitalizira po $5\ \%$ obrestni meri. Koliko let po zadnji vlogi bo imela 4500 evrov?

Za reševanje imaš na voljo 120 minut.

Naloge rešuj samostojno na priloženi papir, in sicer vsako nalogo na svojo stran. Na liste se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom, čitljivo in pregledno. Grafe funkcij riši s svinčnikom. Če nalogo rešuješ na več načinov, nedvoumno označi, katero rešitev naj ocenjevalec točkuje. Če se zmotiš, napačno prečrtaj.

Rešitev vsake naloge bo ocenjena z 0 do 6 točkami.

Državna tekmovalna komisija ti želi veliko uspeha.

7. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2007

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, tako rešitev točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

1. Iskana števila a, b in c zapišemo v ustreznih medsebojnih odnosih: $a+b=c$, $a+3=2c$ in $c+5=2(a+b)$. Rešimo sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami. Dobimo rešitev $a=7$, $b=-2$ in $c=5$.

   Zapis zvez med števili: $a+b=c$, $a+3=2c$ in $c+5=2(a+b)$ .... 2 točki
   Pravilen postopek reševanja sistema .... 2 točki
   Rešitve $a=7$, $b=-2$ in $c=5$ .... 2 točki

   OPOMBA: Za zapisani dve enačbi sistema dobi tekmovalec 1 točko, za eno enačbo ne dobi točke. Za zapisani dve rešitvi dobi 1 točko, za eno rešitev ne dobi nobene točke.

2. Potence z negativnim celim eksponentom v prvem faktorju zapišemo v obliki ulomka. V števcu in imenovalcu dvojnega ulomka poiščemo skupni imenovalec. V števcu dobimo $\frac{a^2+9a+20}{a^2}$, v imenovalcu pa $\frac{a^2+8a+16}{a^2}$. Odpravimo dvojni ulomek, števec razstavimo na $(a+4)(a+5)$ in imenovalec na $(a+4)^2$. Drugi faktor razstavimo na $a(a+4)$. Zadnji (tretji) faktor poenostavimo $(1-\frac{25}{a^2})^{-1}=\frac{a^2}{a^2-25}$ in imenovalec razstavimo $\frac{a^2}{(a+5)(a-5)}$. Ulomke okrajšamo in dobimo $\frac{a^3}{a-5}$.

   Zapis potenc z ulomki $\frac{1+\frac{9}{a}+\frac{20}{a^2}}{1+\frac{8}{a}+\frac{16}{a^2}}$ .... 1 točka
   Ureditev prvega faktorja $\frac{\frac{a^2+9a+20}{a^2}}{\frac{a^2+8a+16}{a^2}}$ .... 1 točka
   Razstavitev števca in imenovalca $\frac{(a+4)(a+5)}{(a+4)^2}$ .... 1 točka

Razstavitev drugega faktorja $a(a+4)$ .... 1 točka
Ureditev tretjega faktorja $(1-\frac{25}{a^2})^{-1} = \frac{a^2}{a^2-25} = \frac{a^2}{(a+5)(a-5)}$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{a^3}{a-5}$ .... 1 točka

3. S sklepnim računom izračunamo, koliko časa bi delo opravilo 10 delavcev: $x = \frac{20\cdot 90}{10} = 180$ dni. Preostanek dela je še za 140 dni $(180-40=140)$. Preostanek dela bo opravilo 50 delavcev $(10+40)$. S sklepnim računom izračunamo, da bodo delo dokončali v 28 dneh. Tako je bilo celotno delo opravljeno v 68 dneh $(40+28=68)$, rok so prehiteli za 22 dni.

   Uporaba sklepnega računa: $x = \frac{20\cdot 90}{10} = 180$ dni. .... 1 točka
   Izračun preostanka dela: $180-40=140$ dni .... 1 točka
   Izračun števila delavcev: $10+40=50$ .... 1 točka
   Uporaba sklepnega računa: $x = \frac{10\cdot 140}{50} = 28$ dni .... 1 točka
   Izračun dni za opravljeno delo: $40+28=68$ dni .... 1 točka
   Odgovor: Rok so prehiteli za 22 dni. .... 1 točka

4. Iskani ulomek zapišemo $\frac{x}{20}$. Po besedilu naloge zapišemo sistem linearnih neenačb $\frac{x}{20} < -\frac{4}{13}$ in $-\frac{5}{13} < \frac{x}{20}$. Neenačbi rešimo z odpravo imenovalcev. Dobimo rešitvi $x < -6\frac{2}{13}$ in $x > -7\frac{9}{13}$. Iščemo celo število, ki leži v preseku obeh rešitev linearnih neenačb. Iskano celo število je -7. Iskani ulomek je $-\frac{7}{20}$.

   Zapis neenačbe $\frac{x}{20} < -\frac{4}{13}$ .... 1 točka
   Zapis neenačbe $-\frac{5}{13} < \frac{x}{20}$ .... 1 točka
   Odprava ulomka v prvi neenačbi $13x < -80$ .... 1 točka
   Odprava ulomka v drugi neenačbi $-100 > 13x$ .... 1 točka
   Izbira $x = -7$ .... 1 točka
   Iskani ulomek $-\frac{7}{20}$ .... 1 točka

5. Naj bo x število šopkov vijolic. Uporabimo osnovni izrek o deljenju in zapišemo $x = 2k+1 = 3s+1 = 4t+1 = 7n$. Iščemo najmanjši skupni večkratnik števil 2, 3 in 4. Iskani večkratnik je 12. Večkratnikom števila 12 prištejemo 1. Možne vrednosti so 13, 25, 37, 49, 61, 73, 85 in 97. Ugotovimo, da je le 49 večkratnik števila 7.

   Zapis: število šopkov je x .... 1 točka
   Zapis zveze $x = 2k+1 = 3s+1 = 4t+1 = 7n$ .... 2 točki
   Izračun $v(2,3,4) = 12$ .... 1 točka
   Ugotovitev $x \in \{13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97\}$ .... 1 točka
   Odgovor $x = 49$ .... 1 točka

Drugi letnik

1. Dolžini katet zapišemo kot $a = 2x$ in $b = x$. Razmerje zapišemo z uporabo kotne funkcije $\tan\alpha = \frac{2x}{x} = 2$. Izračunamo kot $\alpha = 63,43^\circ$. Uporabimo Pitagorov izrek za izračun hipotenuze $c = \sqrt{5}x$. Zapišemo razmerje $a : b : c = 2 : 1 : \sqrt{5}$.

Upoštevanje odnosa katet: $a = 2x$ in $b = x$ .... 1 točka
Uporaba kotne funkcije $\tan\alpha = \frac{2x}{x} = 2$ .... 1 točka
Izračun kota $\alpha = 63,43°$ .... 1 točka
Uporaba Pitagorovega izreka .... 1* točka
Izračun hipotenuze $c = \sqrt{5}x$ .... 1 točka
Zapis razmerja $a : b : c = 2 : 1 : \sqrt{5}$ .... 1 točka

2. Zapis dane funkcije uredimo $f(x) = (a+2)x+a-6$. Upoštevamo, da je funkcija naraščajoča, če velja $k > 0$. Iz tega izhaja, da velja $a+2 > 0$. Rešitev je $a > -2$. Funkcija seka ordinatno os pod izhodiščem, če je $f(0) < 0$. Iz tega sledi, da je $a - 6 < 0$, ter rešitev $a < 6$. Ustrezna rešitev je $a \in (-2, 6)$.

   Ureditev zapisa funkcije $f(x) = (a + 2)x + a - 6$ .... 1 točka
   Sklep: funkcija je naraščajoča za $k > 0$ .... 1 točka
   Izračun $a > -2$ .... 1 točka
   Uporaba pogoja $f(0) < 0$ .... 1 točka
   Izračun $a < 6$ .... 1 točka
   Rešitev $a \in (-2, 6)$ .... 1 točka

3. Izraz $A = 64^{-1} \cdot 8^{2x+4} - 24 \cdot 64^x + 4 \cdot 32^x \cdot 2^{x+3}$ poenostavimo do oblike $72 \cdot 2^{6x}$, vrednost izraza $B = \sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{4}$ pa je enaka 6. Preverimo, ali velja $6 \mid 72 \cdot 2^{6x}$. Ker število 72 lahko zapišemo kot $12 \cdot 6$, pomeni, da izraz B deli izraz A.

   Ureditev izraza $A = 2^{6x+6} - 3 \cdot 2^{6x+3} + 2^{6x+5}$ .... $1 + 1 + 1$ točka
   Poenostavitev $A = 2 \cdot 2^{6x}$ .... 1 točka
   Poenostavitev $B = 6$ .... 1 točka
   Sklep $6|6 \cdot 12 \cdot 2^{6x}$ .... 1 točka

4. Enačbo premice zapišemo v odsekovni obliki $\frac{x}{\frac{3}{a}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$. Odčitamo odseka na koordinatnih oseh $m = \frac{3}{a}$ in $n = \frac{3}{2}$. Ploščina pravokotnega trikotnika je $|\frac{m \cdot n}{2}| = 4{,}5$. Vstavimo ustrezne podatke $|\frac{\frac{3}{a} \cdot \frac{3}{2}}{2}| = 4, 5$. Iz tega izračunamo parameter $a = \pm\frac{1}{2}$.

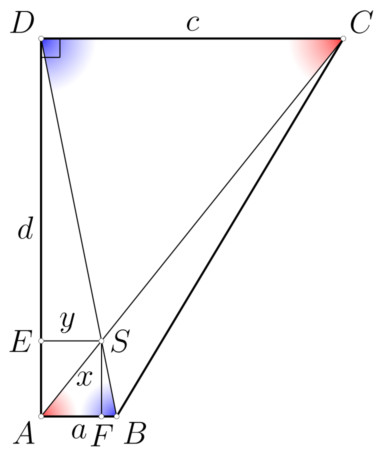
   Zapis v odsekovni obliki $\frac{x}{\frac{3}{a}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$ .... 1 točka
   Izpis $m = \frac{3}{a}$ in $n = \frac{3}{2}$ .... 1 točka
   Uporaba $|\frac{\frac{3}{a} \cdot \frac{3}{2}}{2}| = 4{,}5$. .... 1 točka

   Ureditev $|\frac{9}{4a}| = \frac{9}{2}$ .... 1 točka

   Upoštevanje $\frac{9}{4a} = \pm\frac{9}{2}$ .... 1 točka

   Rešitev $a = \pm\frac{1}{2}$ .... 1 točka

5. Narišemo ustrezno skico trapeza, kjer je $a = 2$, $c = 8$ in $d = 10$. Na skici označimo presečišče diagonal z S, razdaljo presečišča od stranice a z x in razdaljo od stranice d z y. Iz podobnih trikotnikov $\triangle AES \approx \triangle ADC$ in $\triangle FBS \approx \triangle ABD$ izrazimo razmerje npr. $y : c = x : d$ in $(a - y) : a = x : d$. Torej je $y : 8 = x : 10$ in $(2 - y) : 2 = x : 10$. Iz tega izračunamo oddaljenost od presečišča diagonal $x = 2$ cm.



Narisana skica z označenim presečiščem S in obe razdalji x in y .... 1 točka
Zapis podobnih trikotnikov (E na stranici d in F na stranici a):
$\triangle AES \approx \triangle ADC$ in $\triangle FBS \approx \triangle ABD$ .... 1 + 1 točka
Nastavljeni razmerji $y : 8 = x : 10$ in $(2 - y) : 2 = x : 10$ .... 1 + 1 točka
Izračunana oddaljenost $x = 2$ cm .... 1 točka

Tretji letnik

1. V funkcijski predpis vstavimo vrednost spremenljivke $t = 5$. Izračunamo $r(5) = 14e^{0{,}014\cdot 5} \doteq 15$. Torej bo čez pet let 15 miljonov rib. Vprašamo se še, pri katerem času t bo vrednost r enaka 40. Zapišemo enakost $14 \cdot e^{0{,}014\cdot t} = 40$. Enačbo logaritmiramo in v dobljeni enakosti $\ln e^{0{,}014t} = \ln \frac{40}{14}$ upoštevamo, da je logaritem potence enak zmnožku eksponenta potence in logaritma osnove. Zapišemo $0{,}014t \ln e = \ln \frac{40}{14} = \ln \frac{20}{7}$. Enakost poenostavimo $0{,}014t = \ln \frac{20}{7}$. Od tod izrazimo iskano količino $t = \frac{\ln \frac{20}{7}}{0{,}014} \doteq 74{,}99$, kar (navzgor) zaokrožimo na celo število let, torej na 75. Ugotovimo, da bo čez 75 let 40 miljonov rib.

Izračun $r(5) = 14e^{0{,}014\cdot 5} \doteq 15$ .... 1 točka
Odgovor: Čez pet let bo 15 miljonov rib. .... 1 točka
Nastavitev enačbe $14e^{0{,}014\cdot t} = 40$ .... 1 točka
Poenostavitev enačbe $0{,}014 \cdot t \ln \frac{20}{7}$ .... 1 točka
Izračun $t = \frac{\ln \frac{20}{7}}{0{,}014} \doteq 74{,}99$ let .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

2. Enačbo najprej uredimo $\log_3(\log_2 x + 12) = 2$. Upoštevamo definicijo logaritma in zapišemo $3^2 = \log_2 x + 12$. Enačbo ponovno uredimo in dobimo $\log_2 x = -3$. Rešimo $2^{-3} = x$. Rešitev je $x = \frac{1}{8}$.

Ureditev enačbe $\log_3(\log_2 x + 12) = 2$ .... 1 točka
Zapis $3^2 = \log_2 x + 12$ .... 1 točka
Preureditev enačbe v obliko $\log_2 x + 12 = 9$ .... 1 točka
Ureditev $\log_2 x = -3$ .... 1 točka

Zapis $2^{-3} = x$ .... 1 točka
Rešitev $x = \frac{1}{8}$ .... 1 točka

3. Iz zapisa kvadratne funkcije razberemo, da so koeficienti $a = \frac{1+m^2}{m^2}$, $b = -2 \cdot \frac{1+m^2}{m}$ in $c = -1$. Ugotovimo, da moramo izračunati ordinato temena $q = -\frac{D}{4a}$. Izračunana ordinata je enaka $q = -2 - m^2$.

   Zapis koeficientov $a = \frac{1+m^2}{m^2}$, $b = -2 \cdot \frac{1+m^2}{m}$ in $c = -1$ .... 1 točka
   Uporaba diskriminante $D = 4 \cdot \frac{(1+m)^2}{m} + 4\frac{1+m^2}{m^2}$ .... 1 točka
   Izračunana diskriminanta $D = 4 \cdot \frac{1+m^2}{m^2} \cdot (2 + m^2)$ .... 1 točka
   Uporaba obrazca za $q = -\frac{D}{4a} = \frac{4 \cdot \frac{1+m^2}{m^2} \cdot (2+m^2)}{4 \cdot \frac{1+m^2}{m^2}}$ .... 1 točka
   Izračun $q = -2 - m^2$ .... 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

4. Prostornina kvadra je $V_k = 16 \cdot 12 \cdot 12 = 2304$ cm^3. Če bi kvader potopili v vodo, bi se gladina vode dvignila za v in bi veljalo $V_k = \pi r^2 v$, od koder izračunamo $v \doteq 5{,}09$ cm. Ker je gladina vode v valjasti posodi le 5 cm pod zgornjim robom, bi nekaj vode odteklo.

   Izračun prostornine kvadra 2304 cm^3 .... 1 točka
   Ugotovitev $V_k = V_1 - V_2$ .... 1 točka
   Sklep: razlika višin $d = v_1 - v_2$ ne sme biti večja od 5 cm .... 1 točka
   Zapis enakosti $V_k = \pi r^2(v_1 - v_2) = \pi r^2 d$ .... 1 točka
   Izračunana razlika višin $d \doteq 5,09$ cm .... 1 točka
   Odgovor .... 1 točka

5. Uporabimo prehod k novi osnovi in zapišemo logaritme z isto osnovo $\frac{\log a}{\log(b+c)} + \frac{\log a}{\log(c-b)}) = \frac{\log a^2}{\log(c+b)} \cdot \frac{\log a}{\log(c-b)}$. Enačbo lahko delimo z $\log a$, nato množimo s skupnim imenovalcem, da odpravimo ulomke. Dobimo $\log(c + b) + \log(c - b) = \log a^2$. Uredimo $\log(c^2 - b^2) = \log a^2$. Enačbo še antilogaritmiramo, tako dobimo $c^2 - b^2 = a^2$ oziroma $c^2 = a^2 + b^2$. Trikotnik je pravokoten.

   Uporaba prehoda k novi osnovi $\frac{\log a}{\log(b+c)} + \frac{\log a}{\log(c-b)}) = \frac{\log a^2}{\log(c+b)} \cdot \frac{\log a}{\log(c-b)}$ .... 1 + 1 točka
   Množenje s skupnim imenovalcem .... 1 točka
   Ureditev leve strani enačbe $\log(c + b) + \log(c - b) = \log(c^2 - b^2)$ .... 1 točka
   Zapis enakosti $\log(c^2 - b^2) = \log a^2$ .... 1 točka
   Ugotovitev $c^2 = a^2 + b^2$ .... 1 točka

Četrti letnik

1. Uporabimo zvezo za $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ in nato iz prvega faktorja izpostavimo skupni faktor $2 \sin x(\sin x + 1)$. Uredimo drugi faktor $\frac{\tan x}{1-\sin^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$. Izraz krajšamo in dobimo $-2 \sin x$.

Izraz za sinus dvojnega kota $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ .... 1 točka
Izpostavljanje skupnega faktorja $2\sin x(\sin x + 1)$ .... 1 točka
Poenostavitev drugega faktorja $\frac{\tan x}{1-\sin^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$ .... 1 točka
Krajšanje .... 2 točki
Rezultat $-2\sin x$ .... 1 točka

2. Najprej funkcijski predpis $g(x)$ razstavimo: $g(x) = (x-2)(x-1)$. Ničli polinoma $g(x)$ sta $x_1 = 2$ in $x_2 = 1$. Izračunamo vrednost $p(2)$ in $p(1)$. Ugotovimo, da sta to ničli polinoma $p(x)$. Ker sta 2 in 1 ničli obeh danih polinomov, velja trditev, da $g(x)$ deli $p(x)$.

Zapis $g(x) = (x-2)(x-1)$ .... 1 točka
Določitev ničel polinoma $g(x)$: $x_1 = 2$ in $x_2 = 1$ .... 1 točka
Izračun $p(1)$ .... $1+1$ točka
Izračun $p(2)$ .... 1 točka
Sklep .... 1 točka

3. Osnova logaritma je $\frac{1}{2}$, $0 < \frac{1}{2} < 1$, zato so vrednosti funkcije $f(x)$ negativne za $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} > 1$. Neenačbo preoblikujemo in uredimo $\frac{-3x-2}{x(x+2)} > 0$. Skiciramo graf funkcije $g(x) = \frac{-3x-2}{x(x+2)}$ – ničla je $x = -\frac{2}{3}$, pola pa $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Končno odčitamo, za katere x je pozitivna. Rešitev je $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{3}, 0)$.

Zapis neenačbe $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x} > 1$ .... 1 točka
Ureditev neenačbe $\frac{-3x-2}{x(x+2)} > 0$ .... 1 točka
Določitev ničle .... 1 točka
Določitev pola .... 1 točka
Grafična predstavitev .... 1 točka
Rešitev $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{3}, 0)$ .... 1 točka

4. Pot žogice od višine spusta do tal naj bo x. Po prvem odboju od tal je žogica dosegla $\frac{3}{4}x$ prvotne višine, prav toliko pri spustu s te višine. Po drugem odboju je žogica dosegla $\frac{3}{4}(\frac{3}{4}x) = \frac{9}{16}x$ prve višine, prav toliko pri spustu. Po tretjem odboju in spustu je skupaj napravila pot $\frac{27}{64}x \cdot 2$. Po četrtem odboju in spustu je žogica napravila $\frac{81}{256}x \cdot 2$ dolgo pot. Tako je dolžina skupne poti žogice $x + 2x(\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256}) = 653$. Enačbo uredimo $653 = \frac{653}{128}x$ in izračunamo $x = 128$ cm.

Pot po prvem odboju in spustu $\frac{3}{4}x \cdot 2$ .... 1 točka
Pot po drugem spustu in odbuju $\frac{9}{16}x \cdot 2$ .... 1 točka
Posplošitev in zapis zveze $x + 2x(\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256})$ .... 1 točka
Ureditev enakosti $653 = \frac{653}{128}x$ .... $1^* + 1$ točka
Odgovor: Žogico spusti z višine $x = 128$ cm. .... 1 točka

5. Uporabimo formulo $G = \frac{a(1{,}05^5-1)}{1{,}05-1} \cdot 1{,}05^n$. Vstavimo podatke, uredimo enačbo $1{,}05^n = 1{,}63$ in izračunamo $n = 10$ let.

Uporaba obrazca $G = \frac{a(r^5-1)}{1{,}05-1}$ .... 1 točka
Izračun glavnice po petih letih 2765,81 evra .... 1 točka
Uporaba zveze za obretno obrestovenje $G = G \cdot r^n$ .... 1 točka

Vstavljeni podatki $4500 = 2762{,}81 \cdot 1{,}05^n$ .... 1 točka
Urejena enačba $1{,}63 = 1{,}05^n$ .... 1 točka
Odgovor: $n = 10$ let .... 1 točka