**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Za kateri x bo imel izraz $\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x^2-9}$ vrednost 0?

(**A**) 9 (**B**) 3 (**C**) -3 (**D**) 0 (**E**) 2

A2. S katerim izmed navedenih števil je deljivo število $5^{2017}+5^{2016}+5^{2015}$?

(**A**) 15 (**B**) 31 (**C**) 2015 (**D**) 39 (**E**) 2017

A3. Za koliko $\%$ se spremeni vrednost ulomka, če števec povečamo za $20\ \%$, imenovalec pa zmanjšamo za $20\ \%$?

(**A**) $0\ \%$ (**B**) $20\ \%$ (**C**) $40\ \%$ (**D**) $50\ \%$ (**E**) $60\ \%$

B1. Naj bo $d = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\right)^{-1} \cdot 1{,}41\overline{6}$. Natančno izračunaj d.

Poenostavi izraz $\frac{d^{-3}-d^{-4}}{d^{-2}(1-2d^{-1})^2-d^{-4}}$ za $d \neq 0, 1, 3$ in izračunaj njegovo vrednost za izračunani d.

(8 točk)

B2. Polona v pekarni redno kupuje žemlje in rogljičke. Med tednom so pri nakupu vsaj šestih rogljičkov le-ti $15\ \%$ cenejši, med vikendom pa na celoten nakup priznajo $10\ \%$ popust. V torek je Polona kupila 6 rogljičkov in 5 žemelj ter plačala $2{,}27$ €. V soboto pa je kupila 7 rogljičkov, 4 žemlje in vrečko, ki stane toliko, kot dva rogljička, ter plačala $2{,}52$ €. Kdaj se Poloni bolj splača kupiti 9 rogljičkov in 8 žemelj, med tednom ali med vikendom?

(8 točk)

B3. Reši enačbo:

$$\big||x-1|-2\big| = 1 - \frac{1}{2}x.$$

(8 točk)

17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Lik A ima 2 oglišči več in 55 diagonal več kot lik B. Koliko oglišč ima lik A?

(**A**) 25 (**B**) 28 (**C**) 30 (**D**) 40
(**E**) Ni možno določiti.

A2. Za linearno funkcijo f velja $f(-1)+f(3)=-8$ in $f(1)+f(5)=4$. Koliko je $f(2)+f(7)$?

(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

A3. Naj bo n naravno število. Kateri od spodaj navedenih izrazov je enakovreden izrazu $\frac{\sqrt[n]{n^n}\cdot\sqrt[n+n]{n^n}}{\sqrt[n]{n^{n+n}}}$?

(**A**) 1 (**B**) $\sqrt[n]{n}$ (**C**) n (**D**) $\sqrt{n}$ (**E**) $n^{-\frac{1}{2}}$

B1. Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3y} &= \sqrt{x^2+4y-1} \quad \text{in} \\ \sqrt{x-y+2}+2 &= x. \end{aligned}$$

(8 točk)

B2. Določi parametra a in b tako, da bosta premici podani z enačbama

$$\begin{aligned} (a+b)x - ay + a - 2 &= 0 \quad \text{in} \\ (2b-a)x + (a-4b)y - a &= 0 \end{aligned}$$

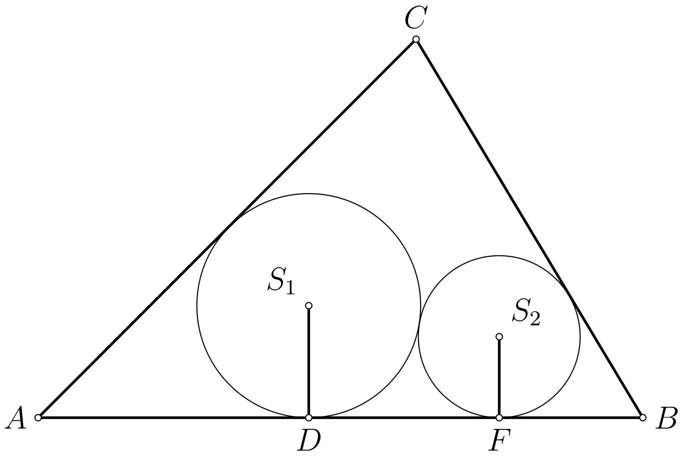
identični (sovpadali, se prekrivali).

(8 točk)

B3. a) Z ravnilom in šestilom konstruiraj trikotnik s podatki $a + b = 7$ cm, $v_a = 3{,}5$ cm in $\beta = 45°$.

b) V trikotnik včrtamo dve krožnici, ki se dotikata (glej simbolično skico). Z njunima polmeroma izrazi razdaljo med njunima dotikališčema s stranico c, torej razdaljo med točkama D in F. Rezultat delno koreni.

(8 točk)



17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. V preglednici so podane vrednosti kvadratne funkcije f. Koliko je $f(4)$?

x	-2	0	1	2
$f(x)$	0	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{8}{3}$

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{5}{3}$ **(C)** -3 **(D)** 0 **(E)** Nič od navedenega

A2. Krogu očrtamo in včrtamo enakostranični trikotnik. Koliko je razmerje dolžin stranic krogu očrtanega in včrtanega trikotnika?

(A) $1 : 3$ **(B)** $2 : 1$ **(C)** $4 : 1$ **(D)** $5 : 2$ **(E)** $\sqrt{3} : 1$

A3. Katero število je rešitev enačbe $2^x \cdot 5^x = 0{,}01 \cdot (10^{x-2})^4$?

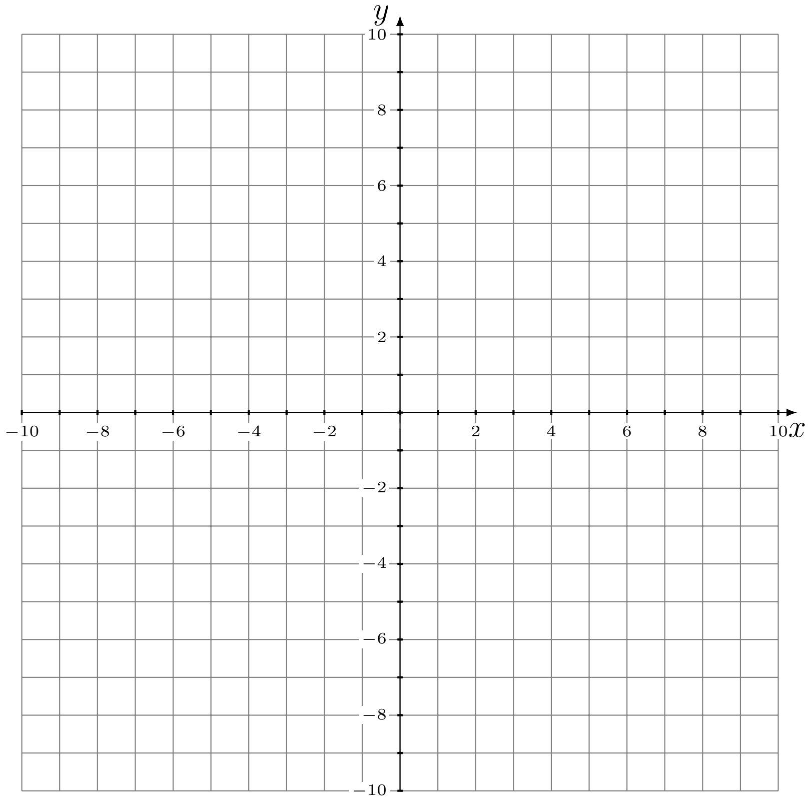
(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{10}{3}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** -2 **(E)** $-\frac{3}{2}$

B1. Dani sta funkciji $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podani s predpisoma $f(x) = 6 - 4x - 2x^2$ in $g(x) = -x + 4$.

a) V istem koordinatnem sistemu nariši grafa obeh funkcij.

b) Zapiši enačbo tangente na graf funkcije f, ki je vzporedna grafu funkcije g.

(8 točk)



B2. Reši enačbo

$$\log^2\left(\sqrt{3^x}-1\right)=1.$$

(8 točk)

B3. Naj bo P poljubna točka na daljici AB z dolžino $\sqrt{27}$ cm. Nad daljico AP z dolžino x je konstruiran kvadrat $APDE$, nad daljico BD pa enakostranični trikotnik BCD. Nariši skico.

a) Izrazi ploščino petkotnika $ABCDE$ z x.

b) Določi x, da bo ploščina petkotnika $ABCDE$ najmanjša.

(8 točk)

17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike
Državno tekmovanje, 22. april 2017

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Naj bo $a_1, \frac{1}{5}, a_3, \frac{16}{125}, \ldots$ geometrijsko zaporedje s samimi pozitivnimi členi. Kolikšna je vsota $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{99}$?

(A) $\frac{5}{4}\left(1 - 0{,}8^{50}\right)$ **(B)** $\frac{5}{4} \cdot 0{,}2^{50}$ **(C)** $\frac{5}{4} - 0{,}2^{50}$
(D) $\frac{5}{4}\left(1 - 8 \cdot 10^{-50}\right)$ **(E)** $5 \cdot 0{,}2^{48}$

A2. Na koliko različnih načinov lahko sedejo v vrsto z 8 sedeži v gledališču 4 pari, če želi vsak posamezen par sedeti skupaj?

(A) $4!$ **(B)** $2 \cdot 4!$ **(C)** 24 **(D)** 384 **(E)** 256

A3. Kateri od navedenih zapisov predstavlja definicijsko območje funkcije $f(x) = \frac{2x}{|x|-2}$?

(A) $\mathbb{R}$ **(B)** $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ **(C)** $\mathbb{R}^+$
(D) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ **(E)** $(-2, 2)$

B1. V razredu s 25 dijaki je bilo povprečje ocen pri kontrolni nalogi iz matematike točno $2{,}32$, od teh so 4 pisali zadostno, 6 dobro in 2 odlično.

a) Izračunaj, koliko dijakov je doseglo nezadostno oz. prav dobro oceno.

b) Določi modus in mediano rezultatov.

(8 točk)

B2. Določi vrednosti parametrov a in b tako, da bo premica z enačbo $y = 3x + 5$ tangenta na graf funkcije f, $f(x) = ax^2 + bx$, v točki z absciso -1.

(8 točk)

B3. Dana je kvadratna enačba $ax^2 + bx + a = 0$ ($a, b \neq 0$ in $a \neq b$). Za njene koeficiente velja, da izrazi $1, \frac{a+b}{a-b}, \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ tvorijo zaporedne člene aritmetičnega zaporedja. Zapiši zvezo med koeficientoma a in b in reši kvadratno enačbo.

(8 točk)

17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Rešitve nalog in točkovnik

(22. APRIL 2017, 10 : 27)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
E	B	D

I/A1. $\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x^2-9} = \frac{x^2(x-2)-9(x-2)}{x^2-9} = \frac{(x-2)(x^2-9)}{x^2-9} = x-2$ in vrednost je enaka 0 za $x=2$. Pravilen odgovor je (**E**).

I/A2. $5^{2017}+5^{2016}+5^{2015} = 5^{2015}(5^2+5+1) = 31\cdot 5^{2015}$. Število je deljivo z 31. Pravilen odgovor je (**B**).

I/A3. $a+0{,}2a = 1{,}2a$, $b-0{,}2b = 0{,}8b$ in $\frac{1{,}2a}{0{,}8b} = 1{,}5\frac{a}{b}$. Vrednost ulomka se poveča za $50\ \%$. Pravilen odgovor je (**D**).

I/B1. Izračunamo vrednost $d = 2\cdot\left(1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\cdot 1{,}41\overline{6}$. Vrednost izraza $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$, torej je $\left(1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\right)^{-1} = \left(\frac{17}{12}\right)^{-1} = \frac{12}{17}$. Decimalno število spremenimo v ulomek in dobimo $1{,}41\overline{6} = \frac{17}{12}$. Izračunamo vrednost izraza $d = 2\cdot\left(1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\cdot 1{,}41\overline{6} = 2\cdot\frac{12}{17}\frac{17}{12} = 2$.
V števcu in imenovalcu izpostavimo d^{-4} in dobimo $\frac{d^{-4}(d-1)}{d^{-4}(d^2(1-2d^{-1})^2-1)}$. Krajšamo z d^{-4} in kvadriramo izraz $(1-2d^{-1})^2$ in dobimo ulomek $\frac{d-1}{d^2(1-4d^{-1}+4d^{-2})-1}$, v imenovalcu odpravimo oklepaj $\frac{d-1}{d^2-4d+4-1}$, imenovalec uredimo $\frac{d-1}{d^2-4d+3}$, razstavimo $\frac{d-1}{(d-1)(d-3)}$ in okrajšamo ter tako dobimo poenostavljeni izraz $\frac{1}{d-3}$.
Vrednost $d=2$ vstavimo v poenostavljen izraz $\frac{1}{d-3}$ in dobimo rešitev -1.

1. način:
Izračun $d=2$ .... **1*+1 točka**
Izpostavitev $d-4$ **v števcu** $d^{-4}(d-1)$ **in imenovalcu** $d^{-4}(d^2(1-2d^{-1})^2-1)$ .... **1 točka**
Zapis ulomka $\frac{d-1}{d^2(d^2(1-2d^{-1})^2-1}$ .... **1 točka**
Kvadriranje $(d^2(1-2d^{-1})^2 = 1-4d^{-1}+4d^{-2}$ .... **1 točka**
Množenje z d^2 **in ureditev** d^2-4d+3 .... **1 točka**
Poenostavljen ulomek $\frac{1}{d-3}$ .... **1 točka**
Rešitev -1 .... **1 točka**
2. način:
Izračun $d=2$ .... **1*+1 točka**
Zapis ulomka $\frac{\frac{1}{d^3}-\frac{1}{d^4}}{\frac{1}{d^2}\left(1-\frac{2}{d}\right)^2-\frac{1}{d^4}}$ .... **1 točka**
Kvadriranje $\left(1-\frac{2}{d}\right)^2 = 1-\frac{4}{d}+\frac{4}{d^2}$ .... **1 točka**
Preoblikovanje ulomka $\frac{\frac{d-1}{d^4}}{\frac{d^2-4d+3}{d^4}}$ .... **1 točka**
Poenostavljen ulomek $\frac{1}{d-3}$ .... **1+1 točka**
Rešitev -1 .... **1 točka**

I/B2. Nastavimo sistem enačb na podlagi podatkov za torkov nakup $6r\cdot 0{,}85+5 = 2{,}27$ € ter za sobotni nakup $(7r+4+2r)\cdot 0{,}9 = 2{,}52$. Pri tem smo pozorni na $10\ \%$ popust med vikendom, $15\ \%$ popust na rogljičke med tednom in vrednost vrečke. Sistem enačb lahko rešujemo z zamenjalnim načinom ali metodo nasprotnih koeficientov. Npr., prvo enačbo pomnožimo z -4, drugo pa s 5, da dobimo sistem enačb $-20{,}4r-20=-9{,}08$ ter $45r+20=14$. Enačbi seštejemo in dobimo linearno enačbo $24{,}6r=4{,}92$ od koder izračunamo, da je $r=0{,}2$. Podatek vstavimo v eno od prvotnih enačb in dobimo na primer $9\cdot 0{,}2+4=2{,}52$ od koder izračunamo $=0{,}25$. Polona bi med tednom plačala $9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}85+8\cdot 0{,}25=3{,}53$ €, med vikendom pa $(9\cdot 0{,}2+8\cdot 0{,}25)\cdot 0{,}9=3{,}42$ €, torej se ji nakup bolj splača med vikendom.

Zapis enačbe za torkov nakup $6r\cdot 0{,}85+5=2{,}27$ **........ 1 točka**
Zapis enačbe za sobotni nakup $(7r+4+2r)\cdot 0{,}9=2{,}52$ **........ 1 točka**
Reševanje sistema enačb .... 1 točka
Izračun $r=0{,}2$ **........ 1 točka**
Izračun $=0{,}25$ **........ 1 točka**
Izračun za nakup med tednom $9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}85+8\cdot 0{,}25=3{,}53$ **€ .... 1 točka**
Izračun za nakup med vikendom $(9\cdot 0{,}2+8\cdot 0{,}25)\cdot 0{,}9=3{,}42$ **€ .... 1 točka**
Zapis odgovora .... 1 točka

I/B3. Po definiciji absolutne vrednosti iz dane enačbe zapišemo dve enačbi $|x-1|-2=1-\frac{1}{2}x$ in $|x-1|-2=-1+\frac{1}{2}x$. Nato vsako enačbo ponovno rešujemo po definiciji absolutne vrednosti.
Iz prve od enačb dobimo enačbi $x-1-2=1-\frac{1}{2}x$ in $x-1-2=-1+\frac{1}{2}x$. Rešitev enačbe $x-1-2=1-\frac{1}{2}x$ je $x=\frac{8}{3}$, ki ne ustreza prvotni enačbi. Rešitev enačbe $x-1-2=-1+\frac{1}{2}x$ je $x=-4$, ki ustreza prvotni enačbi.
Iz druge od enačb dobimo enačbi $x-1-2=-1+\frac{1}{2}x$ in $-x+1-2=-1+\frac{1}{2}x$.
Rešitev enačbe $x-1-2=-1+\frac{1}{2}x$ je $x=4$, ki ne ustreza prvotni enačbi.
Rešitev enačbe $-x+1-2=-1+\frac{1}{2}x$ je $x=0$, ki ustreza prvotni enačbi.
Enačba ima torej rešitvi $x=-4$ in $x=0$.

Zapis dveh enačb po definiciji absolutne vrednosti. Zapisani enačbi, npr. $|x-1|-2=1-\frac{1}{2}x$ **in** $|x-1|-2=-1+\frac{1}{2}x$ **........ 1 točka**
Reševanje prve enačbe po definiciji absolutne vrednosti. Zapisani enačbi, npr. $x-1-2=1-\frac{1}{2}x$ **in** $-x+1-2=1-\frac{1}{2}x$ **........ 1 točka**
Rešitev enačbe $x-1-2=1-\frac{1}{2}x$**,** $x=\frac{8}{3}$ **........ 1 točka**
Rešitev enačbe $-x+1-2=1-\frac{1}{2}x$**,** $x=-4$ **........ 1 točka**
Reševanje druge enačbe po definiciji absolutne vrednosti. Zapisani enačbi, npr. $x-1-2=-1+\frac{1}{2}x$ **in** $-x+1-2=-1+\frac{1}{2}x$ **........ 1 točka**
Rešitev enačbe $x-1-2=-1+\frac{1}{2}x$**,** $x=4$ **........ 1 točka**
Rešitev enačbe $-x+1-2=-1+\frac{1}{2}x$**,** $x=0$ **........ 1 točka**
Preverjanje rešitev in zapis rešitev $x=-4$ **in** $x=0$ **........ 1 točka**

17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Rešitve nalog in točkovnik

(22. APRIL 2017, 10 : 27)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
C	B	E

II/A1. Število diagonal se izračuna z $d = \frac{n(n-3)}{2}$. Če ima lik B n oglišč, jih ima lik A $n+2$ in za število diagonal velja $\frac{(n+2)(n-1)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 55$. Dobimo $n = 28$. Iz tega sledi, da ima lik A 30 oblišč. Pravilen odgovor je (**C**).

II/A2. Linearna funkcija je oblike $f(x) = k \cdot x + n$. Iz prve zveze dobimo $2k + 2n = -8$, iz druge pa $6k + 2n = 4$. Iz tega sledi $k = 3$ in $n = -7$, $f(x) = 3x - 7$. Tako velja $f(2) + f(7) = 13$. Pravilen odgovor je (**B**).

II/A3. $\sqrt[n]{n^n} = n$, $\sqrt[n+n]{n^n} = \sqrt[2]{n}$, $\sqrt[n]{n^{n+n}} = n^2$. Vrednost izraza $\frac{\sqrt[n]{n^n} \cdot \sqrt[n+n]{n^n}}{\sqrt[n]{n^{n+n}}}$ je enaka $\frac{n \cdot \sqrt[2]{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt[2]{n}} = n^{-\frac{1}{2}}$. Pravilen odgovor je (**E**).

II/B1. Prvo enačbo kvadriramo in preoblikujemo v $x^2 - 2x + 7y - 1 = 0$. V drugi enačbi koren osamimo, kvadriramo in izrazimo $y = -x^2 + 5x - 2$. To vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo $2x^2 - 11x + 5 = 0$. Za $x_1 = 5$ dobimo $y_1 = -2$, rešitev ustreza prvotni enačbi. Za $x_2 = \frac{1}{2}$ dobimo $y_2 = \frac{1}{4}$, rešitev ne ustreza prvotni enačbi.

Kvadriranje prve enačbe in preoblikovanje v npr.: $x^2 - 2x + 7y - 1 = 0$ **........... 1 točka**
Osamitev korena v drugi enačbi .... 1* točka
Kvadriranje in preoblikovanje v $y = -x^2 + 5x - 2$ **ali** $x^2 - 5x + y + 2 = 0$ **........... 1 točka**
Reševanje sistema nelinearnih enačb, npr. zamenjalni način .... 1* točka
Preoblikovanje v $2x^2 - 11x + 5 = 0$ **.. 1 točka**
Rešitev $x_1 = 5$ **in** $y_1 = -2$ **.. 1 točka**
Rešitev $x_2 = \frac{1}{2}$ **in** $y_2 = \frac{1}{4}$ **.. 1 točka**
Ugotovitev, da prva rešitev ustreza in druga ne ustreza .... 1 točka

Opomba: Če dijak izračuna samo $x_1 = 5$ **in** $x_2 = \frac{1}{2}$ **, ustreznih vrednosti** y **pa ne izračuna, dobi** 1 **točko od zadnjih treh.**

II/B2. Enačbi premic zapišemo v eksplicitni obliki: $y = \frac{a+b}{a}x + \frac{a-2}{a}$ in $y = \frac{a-2b}{a-4b}x + \frac{a}{a-4b}$. Če sta premici identični, imata zapisani v eksplicitni obliki enaka smerna koeficienta in enaka odseka na ordinatni osi. Dobimo enačbi $\frac{a+b}{a} = \frac{a-2b}{a-4b}$ in $\frac{a-2}{a} = \frac{a}{a-4b}$. Iz prve enačbe dobimo $b \cdot (a + 4b) = 0$. Rešitev $b = 0$ ne ustreza, ker se druga enačba preoblikuje v $a - 2 = a$ in nima rešitve. Ostane še druga možnost $a + 4b = 0$, oziroma $4b = -a$. To uporabimo v drugi enačbi in dobimo $\frac{a-2}{a} = \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}$ in iz tega sledi $a = 4$ in $b = -1$.

Opomba: Nalogo bi lahko rešili tudi tako, da bi upoštevali, da je razmerje istoležnih koeficientov enačb premic zapisanih v implicitni obliki enako.

Zapis v eksplicitni obliki $y = \frac{a+b}{a}x + \frac{a-2}{a}$ **in** $y = \frac{a-2b}{a-4b}x + \frac{a}{a-4b}$ **....................... 1 točka**
Ugotovitev ali upoštevanje, da imata premici enaka smerna koeficienta in enaki začetni vrednosti .... 1 točka
Zapis ustreznih enačb $\frac{a+b}{a} = \frac{a-2b}{a-4b}$ **in** $\frac{a-2}{a} = \frac{a}{a-4b}$ **.................................. 1 točka**
Preoblikovanje prve enačbe v $b \cdot (a + 4b) = 0$ **.................................. 1 točka**

Rešitev $b=0$ **ne ustreza** .... **1 točka**
Ugotovitev $a+4b=0$ .... **1 točka**
Izračun $a=4$ **in** $b=-1$ .... **1+1 točka**

II/B3.

a) Konstruiramo kot β z ravnilom in šestilom. Iz oglišča B na nosilki stranice a odmerimo $a+b$. Narišemo višinski pas in dobimo oglišče A. Dobimo enakokraki trikotnik, npr.: ABD in narišemo simetralo stranice AD. Dobimo oglišče C in trikotnik ABC.

Konstruiran kot $\beta=45°$ .... **1 točka**
Narisan višinski pas in oglišče A .... **1 točka**
Na nosilki stranice a **odmerjeno** $a+b$ **in dobimo trikotnik** ABD .... **1 točka**
Ugotovitev, da je trikotnik ACD **enakokrak** .... **1 točka**
Konstruirana simetrala stranice AD **in narisan trikotnik** ABC .... **1 točka**

b) Povežemo S_1 in S_2, njuna razdalja je r_1+r_2. Skozi S_1 narišemo vzporednico k stranici c in dobimo pravokotni trikotnik s katetama r_2-r_1 in d. Dolžina druge katete je iskana razdalja, izračunamo jo po Pitagorovem izreku $d^2=(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2$ in dobimo $d=2\sqrt{r_1\cdot r_2}$.

Označen ali upoštevan pravokotni trikotnik .... **1 točka**
Uporaba Pitagorovega izreka $d^2=(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2$ .... **1 točka**
Rešitev $d=2\sqrt{r_1\cdot r_2}$ .... **1 točka**

17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Rešitve nalog in točkovnik

(22. APRIL 2017, 10 : 27)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
D	B	B

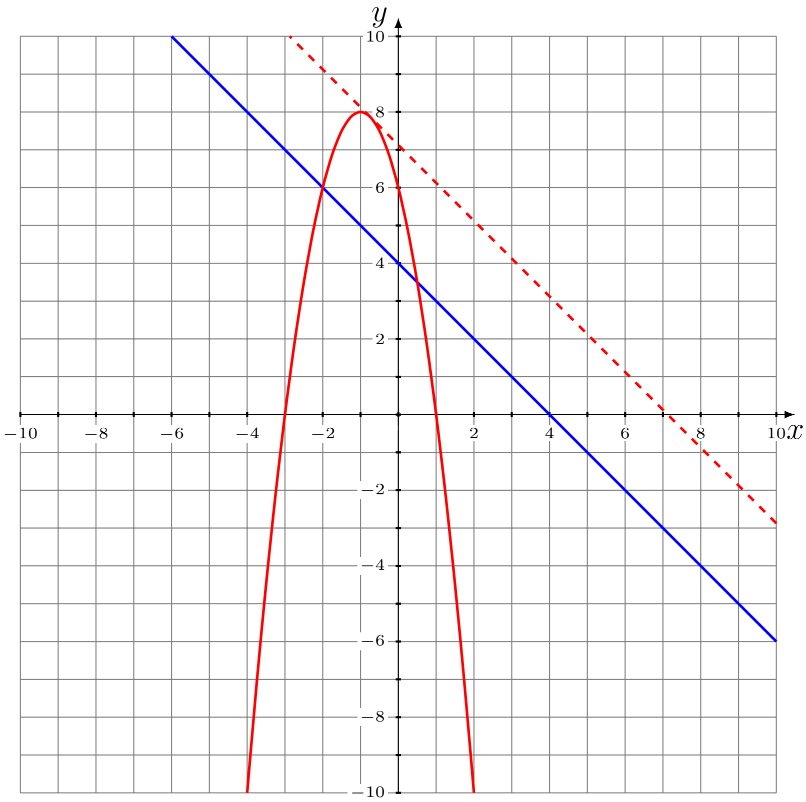
III/A1. Ena ničla funkcije f je -2, v točki $T(1,3)$ ima graf funkcije f teme, torej je 4 druga ničla funkcije f, zato je $f(4) = 0$. Pravilen odgovor je (**D**).

III/A2. Naj bo v dolžina višine krogu očrtanega enakostraničnega trikotnika, v_1 pa dolžina višine krogu včrtanega enakostraničnega trikotnika in r polmer kroga. Za očrtani trikotnik velja $\frac{1}{3}v = r$ in za včrtani trikotnik velja $\frac{2}{3}v_1 = r$. Iz obeh enakosti sledi, da je razmerje višin očrtanega in včrtanega trikotnika enako $v : v_1 = 2 : 1$. V enakem razmerju sta tudi dolžini stranic trikotnikov. Pravilen odgovor je (**B**).

III/A3. Upoštevamo pravila za računanje s potencami in preoblikujemo enačbo v obliko $10^x = 10^{4x-10}$. Rešitev enačbe je $x = \frac{10}{3}$. Pravilen odgovor je (**B**).

III/B1.

a) Ničli funkcije f sta -3 in 1, teme grafa funkcije f je v točki $T(-1,8)$. Graf funkcije g ima smerni koeficient -1, ordinatno os pa seka v točki $N(0,4)$. Narišemo oba grafa.



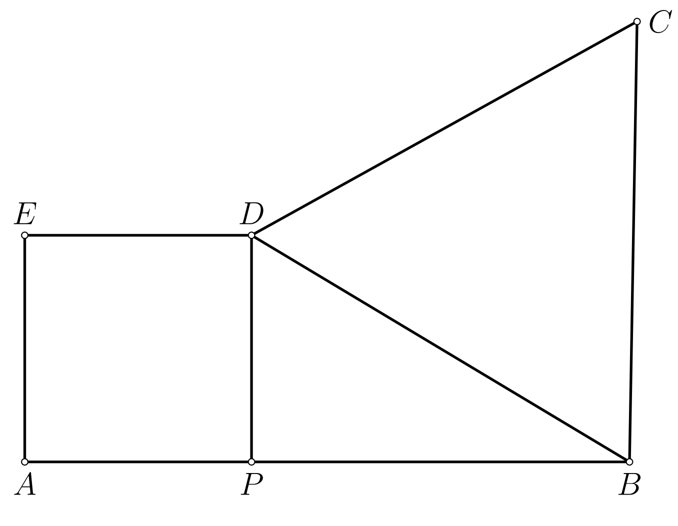
b) Tangenta vzporedna grafu funkcije g ima enačbo $y = -x + n$. Tangenta se dotika parabole, zato imata krivulji eno skupno točko. Enačbi krivulj izenačimo in dobimo kvadratno enačbo $2x^2 + 3x + (n-6) = 0$. Kvadratna enačba ima eno rešitev, ko je diskriminanta $D = 3^2 - 4 \cdot 2(n-6)$ enaka 0, kar nam da rešitev $n = \frac{57}{8}$. Enačba tangente je $y = -x + \frac{57}{8}$.

Izračun ničel in začetne vrednosti funkcije f .... **1 točka**
Izračun temena grafa funkcije f **in narisan graf funkcije** f .... **1 točka**
Narisan graf funkcije g .... **1 točka**
Zapis enačbe vzporednice grafa funkcije g $y = -x + n$ .... **1 točka**
Zapis kvadratne enačbe $2x^2 + 3x + (n - 6) = 0$ .... **1 točka**
Zapis enačbe $3^2 - 4 \cdot 2(n - 6) = 0$ .... **1 točka**
Izračun $n = \frac{57}{8}$ .... **1 točka**
Zapis enačbe tangente $y = -x + \frac{57}{8}$ .... **1 točka**

III/B2. Iz dane enačbe dobimo enačbi $\log\left(\sqrt{3^x} - 1\right) = 1$ in $\log\left(\sqrt{3^x} - 1\right) = -1$. Po preoblikovanju prve enačbe dobimo $\sqrt{3^x} - 1 = 10$, ki jo preoblikujemo do enačbe $3^x = 121$. Rešitev prve enačbe je $x = \log_3 121 \doteq 4{,}37$. Pri drugi enačbi dobimo $\sqrt{3^x} - 1 = 10^{-1}$, kar preoblikujemo do $3^x = \frac{121}{100}$. Rešitev druge enačbe je $x = \log_3 \frac{121}{100} \doteq 0{,}174$.

Zapisana prva enačba $\log\left(\sqrt{3^x} - 1\right) = 1$ .... **1 točka**
Preoblikovana prva enačba $\sqrt{3^x} - 1 = 10$ .... **1 točka**
Reševanje prve enačbe .... **1* točka**
Rešitev prve enačbe $x = \log_3 121 \doteq 4{,}37$ .... **1 točka**
Zapisana druga enačba $\log\left(\sqrt{3^x} - 1\right) = -1$ .... **1 točka**
Preoblikovana druga enačba $\sqrt{3^x} - 1 = 10^{-1}$ .... **1 točka**
Reševanje druge enačbe .... **1* točka**
Rešitev druge enačbe $x = \log_3 \frac{121}{100} \doteq 0{,}174$ .... **1 točka**

III/B3. Ploščina S petkotnika $ABCDE$ je vsota ploščin kvadrata $APDE$ (S_1), pravokotnega trikotnika PBD (S_2) in enakostraničnega trikotnika BCD (S_3). Ploščine vseh treh likov izrazimo z x. Ploščina kvadrata je $S_1 = x^2$, ploščina pravokotnega trikotnika je $S_2 = \frac{x \cdot \left(\sqrt{27} - x\right)}{2}$. Ploščina enakostraničnega trikotnika je $S_3 = \frac{|BD|^2\sqrt{3}}{4}$. Dolžino stranice BD izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka $|BD|^2 = y^2 = x^2 + \left(\sqrt{27} - x\right)^2 = 2x^2 - 6\sqrt{3}x + 27$. To upoštevamo v zgornji formuli in dobimo $S_3 = \frac{2\sqrt{3}x^2 - 18x + 27\sqrt{3}}{4}$. Formula za ploščino petkotnika $ABCDE$ izražena z x je $S = S_1 + S_2 + S_3 = x^2 + \frac{x \cdot \left(\sqrt{27} - x\right)}{2} + \frac{2\sqrt{3}x^2 - 18x + 27\sqrt{3}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{3\sqrt{3} - 9}{2}x + \frac{27\sqrt{3}}{4}$. Upoštevamo, da ima kvadratna funkcija minimum, ko je $x = p = -\frac{b}{2a}$. Izračunamo $p = -\frac{\frac{3\sqrt{3} - 9}{2}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3} + 9}{2\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{-9 + 6\sqrt{3}}{2}$. Točka p je oddaljena od točke A za $\frac{-9 + 6\sqrt{3}}{2}$ cm.



Narisana skica .... **1 točka**
Zapis ali uporaba formule za ploščino kvadrata $APDE$ $S_1 = x^2$ .... **1 točka**
Zapis ali uporaba formule za ploščino pravokotnega trikotnika PBD
$S_2 = \frac{x \cdot \left(\sqrt{27} - x\right)}{2}$ .... **1 točka**
Zapis formule za izračun dolžine stranice BD
$|BD|^2 = y^2 = x^2 + \left(\sqrt{27} - x\right)^2 = 2x^2 - 6\sqrt{3}x + 27$ .... **1 točka**
Zapis ali uporaba formule za ploščino enakostraničnega trikotnika BCD
$S_3 = \frac{y^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}x^2 - 18x + 27\sqrt{3}}{4}$ .... **1 točka**
Ploščina petkotnika $ABCDE$
$S = S_1 + S_2 + S_3 = x^2 + \frac{x \cdot \left(\sqrt{27} - x\right)}{2} + \frac{2\sqrt{3}x^2 - 18x + 27\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{3\sqrt{3}-9}{2}x + \frac{27\sqrt{3}}{4}$ .... **1 točka**
Zapis ali upoštevanje, da ima kvadratna funkcija minimum pri $x = p = -\frac{b}{2a}$ ...... **1 točka**
Izračun $x = p = -\frac{\frac{3\sqrt{3}-9}{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}+9}{2\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{-9+6\sqrt{3}}{2}$ **cm** .... **1 točka**

17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike

Državno tekmovanje, 22. april 2017

Rešitve nalog in točkovnik

(22. APRIL 2017, 10 : 27)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
A	D	D

IV/A1. Iz $\frac{a_3}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{16}{125}}{a_3}$ sledi, da je $a_3 = \frac{4}{25}$. Potem je $q = \frac{4}{5}$, $a_1 = \frac{1}{4}$. Vsota je $S = a_1 \cdot \frac{q^{50}-1}{q-1} = \frac{5}{4}\left(1 - 0{,}8^{50}\right)$. Pravilen odgovor je (**A**).

IV/A2. Načinov razporeditev 4 parov v vrsto je $4! = 24$. Če želijo pari sedeti skupaj, se lahko posedejo na $4! \cdot 2^4 = 384$ načinov. Pravilen odgovor je (**D**).

IV/A3. Funkcija ni definirana za $|x| - 2 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Definicijsko območje funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Pravilen odgovor je (**D**).

IV/B1.

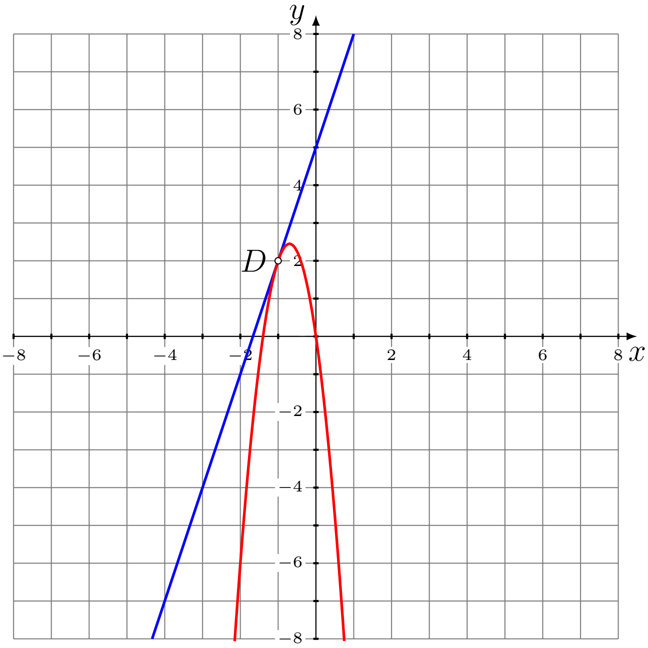
a) Naj bo število dijakov z nezadostno oceno x , število dijakov s prav dobro oceno pa y. Zapišemo prvo enačbo $x + y = 13$. Upoštevamo izračun povprečja $\frac{x+4\cdot 2+6\cdot 3+4y+2\cdot 5}{25} = 2{,}32$ in dobimo drugo enačbo $x + 4y = 22$. Rešimo sistem enačb in dobimo rešitev $x = 10$ in $y = 3$. Na ta način smo izračunali, da je 10 dijakov doseglo nezadostno oceno in 3 prav dobro oceno.

Zapis prve enačbe $x + y = 13$ .... **1 točka**
Uporaba formule za povprečje ocen $\frac{x+4\cdot 2+6\cdot 3+4y+2\cdot 5}{25} = 2{,}32$ .... **1 točka**
Poenostavitev druge enačbe $x + 4y = 22$ .... **1 točka**
Reševanje sistema enačb .... **1* točka**
Izračun $x = 10$ .... **1 točka**
Izračun $y = 3$ .... **1 točka**

b) Ugotovimo, da je 13. podatek po velikosti 2, zato je mediana 2. Ugotovimo, da je najpogostejši rezultat 1, zato je modus 1.

Določitev mediane $Me = 2$ .... **1 točka**
Določitev modusa $Mo = 1$ .... **1 točka**

IV/B2. Izračunamo ordinato dotikališča $y = 3(-1) + 5 = 2$. Upoštevamo koordinate dotikališča v $f(x) = ax^2 + bx$ in dobimo enačbo $a - b = 2$. Odvajamo funkcijo f in dobimo $f'(x) = 2ax + b$. Upoštevamo dotikališče $D(-1, 2)$ in smerni koeficient premice $k = 3$ ter dobimo enačbo $-2a + b = 3$. Rešimo sistem enačb in dobimo rešitev $a = -5$ in $b = -7$.



Izračun ordinate dotikališča $y = 2$ .... **1 točka**
Zapis prve enačbe $a - b = 2$ .... **1 točka**
Zapis ali upoštevanje odvoda funkcije f .... **1 točka**
Upoštevanje smernega koeficienta premice .... **1* točka**
Zapisana druga enačba $-2a + b = 3$ .... **1 točka**
Reševanje sistema .... **1* točka**
Izračun $a = -5$ .... **1 točka**
Izračun $b = -7$ .... **1 točka**

IV/B3. Upoštevamo definicijo aritmetičnega zaporedja in dobimo $\frac{a+b}{a-b} - 1 = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{a-b}$. Uredimo enačbo $\frac{a+3b}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. Po odpravi ulomka dobimo enačbo $b^2 + 2ab = b(b + 2a) = 0$. Če upoštevamo, da je $b \neq 0$, je rešitev $b = -2a$. Pri upoštevanju $b = -2a$ v kvadratni enačbi, dobimo $ax^2 - 2ax + a = 0$. Upoštevamo, da je $a \neq 0$ in dobimo enačbo $x^2 - 2x + 1 = 0$. Rešitev enačbe je $x = 1$.

Upoštevanje definicije aritmetičnega zaporedja $\frac{a+b}{a-b} - 1 = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{a-b}$ .... **1 točka**
Preoblikovanje enakosti .... **1* točka**
Urejena in razcepljena enačba $b^2 + 2ab = b(b + 2a) = 0$ .... **1+1 točka**
Ker je $b \neq 0$**, je rešitev** $b = -2a$ .... **1 točka**
Upoštevanje $b = -2a$ **v kvadratni enačbi** $ax^2 - 2ax + a = 0$ .... **1 točka**
Upoštevanje $a \neq 0$ **in reševanje enačbe** $x^2 - 2x + 1 = 0$ .... **1 točka**
Rešitev $x = 1$ .... **1 točka**