Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Če je $\frac{5}{6}$ nekega števila enako 25, je $\frac{6}{5}$ istega števila enako:

(**A**) 3,5 (**B**) 11 (**C**) 30 (**D**) 36 (**E**) 49

A2. Izraz $(a^2 - 4) \cdot (a - 2)^{-1}$ je enak izrazu:

(**A**) $a - 2$ (**B**) $(a - 2)^2$ (**C**) $a + 2$ (**D**) $(a + 2)^2$ (**E**) $a - 4$

A3. Koliko deliteljev ima število 152?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10
(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

A4. Rešitev nenenačbe $a + 1 > 2 - 3a$ je:

(**A**) $a > -2$ (**B**) $a > 4$ (**C**) $a < 0{,}25$ (**D**) $a > 0{,}25$ (**E**) $a < -1$

A5. Ceno računalnika so s 100 000 SIT znižali za 20 %, čez en mesec pa so ceno povišali za 20 %. Kolikšna je končna cena računalnika?

(**A**) 80 000 SIT (**B**) 96 000 SIT (**C**) 100 000 SIT (**D**) 110 000 SIT (**E**) 120 000 SIT

A6. Vrednost izraza $|-1^{-1}|^{-1} - |-2^{-2}|^{-1} - |-3^{-1}|^{-2}$ je:

(**A**) -13 (**B**) $\frac{23}{36}$ (**C**) 13 (**D**) 14
(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

II. DEL

B1. Poenostavi izraz: $\dfrac{2-x}{x^3-x^2-x+1} : \left(\dfrac{1}{x-1} \cdot \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{x+1}\right)$.

B2. Vsota dveh števil je 42. Če večje število delimo z manjšim, dobimo količnik 3 in ostanek 2. Kateri števili sta to? Zapiši odgovor.

B3. Na postaji se je zbralo 70 dijakov. Bili so iz Ljubljane, Celja in Maribora. Iz Maribora in Ljubljane skupaj jih je bilo toliko kot iz Celja, iz Celja in Maribora skupaj pa jih je bilo šestkrat toliko kot iz Ljubljane. Koliko dijakov je bilo iz posameznih mest? Zapiši odgovor.

B4. Dokaži izjavo: Če produktu treh zaporednih celih števil prištejemo srednje izmed teh števil, dobimo kub tega srednjega števila.

6. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2006

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Za točke $A(1,4)$, $B(2,7)$ in $C(-1,2)$ velja ena izmed naslednjih trditev. Katera?

(**A**) Točke A, B in C so kolinearne.
(**B**) Točka A je razpolovišče daljice BC.
(**C**) $d(A,B) = d(A,C)$
(**D**) Točke A, B in C so oglišča trikotnika.
(**E**) Točka C leži med točkama A in B.

A2. Katera enačba predstavlja premico?

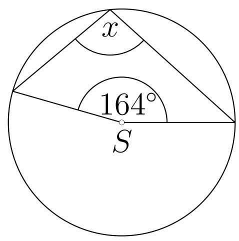
(**A**) $xy = 5$
(**B**) $\frac{2x}{3} - 1 = 3y$
(**C**) $y = x^2 - 3$
(**D**) $3x - y^2 - 1 = 0$
(**E**) $y = x^{\frac{1}{2}}$

A3. Katera izmed trditev je pravilna?

(**A**) Presečišče simetral kotov poljubnega trikotnika je središče temu trikotniku očrtane krožnice.
(**B**) Presečišče simetral stranic poljubnega trikotnika je središče temu trikotniku včrtane krožnice.
(**C**) Težišče poljubnega trikotnika sovpada s središčem temu trikotniku včrtane krožnice.
(**D**) Središči očrtane in včrtane krožnice poljubnega trikotnika ležita v njegovi notranjosti.
(**E**) Višinska točka trikotnika lahko leži izven trikotnika.

A4. Koliko meri kot x?

(**A**) $16°$ (**B**) $82°$ (**C**) $98°$ (**D**) $164°$ (**E**) $328°$



A5. Vrednost izraza $\left(\sqrt{\left(\sqrt{(\sqrt{2})^2}\right)^2}\right)^2$ je enaka:

(**A**) 1 (**B**) $\sqrt[4]{2}$ (**C**) $\sqrt{2}$ (**D**) 2 (**E**) 4

A6. Vrednost izraza $\frac{7^{2n+3} \cdot 7^{3n+2}}{49 \cdot 7^{5n}}$ je enaka:

(**A**) $\frac{1}{343}$ (**B**) $\frac{1}{7}$ (**C**) 49 (**D**) 343 (**E**) 2401

II. DEL

B1. Točki $A(3, y)$ in $B(x, 9)$ ležita na premici $4x - 3y + 27 = 0$. Izračunaj razdaljo med njima.

B2. Dva kota trikotnika sta v razmerju $1 : 2$. Tretji notranji kot je enak aritmetični sredini prvih dveh. Določi velikosti notranjih kotov tega trikotnika.

B3. Brez uporabe žepnega računala natančno izračunaj vrednost izraza

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}\right):\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

B4. Dana sta izraza $A = \sqrt[3]{\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}}$ in $B = \sqrt{\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}}$. Brez uporabe žepnega računala dokaži, da sta vrednosti izrazov A in B enaki celi števili.

6. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2006

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

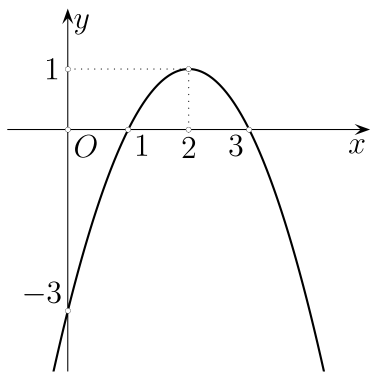
A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Za katere vrednosti m se graf funkcije $f(x) = x^2 + mx + 4$ dotika abscisne osi?

(**A**) $m = 0$ (**B**) $m = \pm 4$ (**C**) $m = \pm 2$
(**D**) $m = 1$ in $m = 5$ (**E**) $m = -1$ in $m = -5$

A2. Kateri predpis ustreza grafu funkcije na sliki?



(**A**) $f(x) = (x+2)^2 + 1$ (**B**) $f(x) = -(x-1)^2 + 2$
(**C**) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ (**D**) $f(x) = -(x-2)^2 + 1$
(**E**) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

A3. Krogu s polmerom r včrtamo kvadrat. Dolžina stranice kvadrata je:

(**A**) $2r\sqrt{2}$ (**B**) $r\sqrt[3]{3}$ (**C**) $\frac{r}{\sqrt{2}}$ (**D**) $\frac{r}{2}$
(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

A4. Dve krogli in stožec skupaj tehtajo enako kot kocka. Tri krogle tehtajo enako kot stožec in kocka. Koliko stožcev tehta enako kot ena krogla?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

A5. Eksponentna funkcija s predpisom $f(x) = -2 \cdot 2^{3x-1} + 4$ ima začetno vrednost

(**A**) -2 (**B**) $\frac{2}{3}$ (**C**) 3 (**D**) 4
(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

A6. Za katero vrednost števila a ima funkcija $f(x) = \log_4(x^2 + a) - 2$ ničlo pri $x = 5$?

(**A**) -9 (**B**) 0 (**C**) 2 (**D**) 5 (**E**) 9

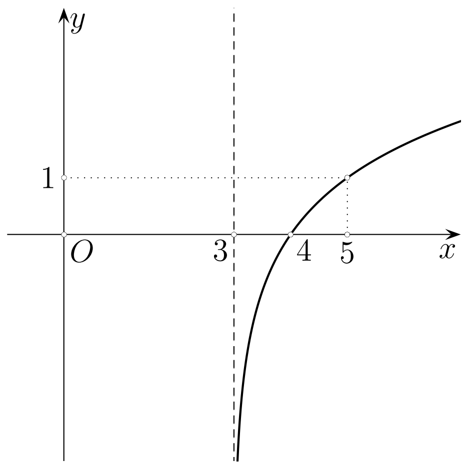
II. DEL

B1. Reši neenačbo $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{15}{2}\leq 0$.

B2. Diagonali romba sta dolgi 10 cm in 24 cm. Kolikšna je dolžina polmera rombu včrtanega kroga?

B3. Reši enačbo $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

B4. Zapiši predpis logaritemske funkcije, katere graf je na sliki. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.



6. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2006

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Kateri polinom moraš deliti s polinomom $q(x) = 3x - 5$, da dobiš količnik $k(x) = x^2 - 2x + 7$ in ostanek $r(x) = 2$?

(**A**) $p(x) = 3x^3 - 2x + 7$
(**B**) $p(x) = 3x^3 - 11x - 33$
(**C**) $p(x) = 3x^3 - 11x^2 + 31x - 33$
(**D**) $p(x) = 3x^3 + 11x^2 + 31x - 33$
(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

A2. Kateri izmed navedenih polinomov je največje stopnje?

(**A**) $p(x) = (1 - x^2)^3$
(**B**) $p(x) = (2 + 3x^4)(4 + x^2)$
(**C**) $p(x) = (2 - x^3)^2$
(**D**) $p(x) = (2 - x^2)^2(1 - x^3)$
(**E**) $p(x) = (7 + 4x + 7x^7) - (7x^7 - 3x^6 + x^2)$

A3. Dana je neenačba $\dfrac{10}{x^2 + 4} \leq 0$. Katera števila jo rešijo?

(**A**) $x \in [-2, 2]$
(**B**) $x_1 = 2,\ x_2 = -2$
(**C**) $x \in (-\infty, 2)$
(**D**) $x \in (0, 5)$
(**E**) Neenačba nima rešitev.

A4. Vrednost izraza $\dfrac{(1 - \sin 30^0)(1 + \cos 60^0)}{(1 + \cos 30^0)(1 - \sin 60^0)} : (2 + \tan 45^0)^2$ je enaka:

(**A**) $\frac{1}{9}$
(**B**) $\frac{1}{4}$
(**C**) $\frac{1}{3}$
(**D**) $\frac{1}{2}$
(**E**) 1

A5. Največja vrednost funkcije $f(x) = \pi \sin 4x$ je:

(**A**) 1
(**B**) π
(**C**) 4
(**D**) 2π
(**E**) 4π

A6. Prvi člen geometrijskega zaporedja s samimi pozitivnimi členi je enak 27, sedmi člen pa $\frac{1}{27}$. Dvanajsti člen je enak:

(**A**) $\frac{1}{3^8}$
(**B**) $\pm\frac{1}{3^9}$
(**C**) $-\frac{1}{6561}$
(**D**) 1
(**E**) 10

II. DEL

B1. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = 1 + x^{-1}$. Določi definicijsko območje, izračunaj ničle, zapiši enačbe asimptot, če le-te obstajajo, in nariši graf funkcije.

B2. Izračunaj vsoto ničel polinoma $p(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 3$.

B3. Notranji koti konveksnega šestkotnika merijo celo število stopinj in tvorijo aritmetično zaporedje. Naj bo α največji kot tega šestkotnika. Kolikšna je največja možna velikost kota α?

B4. Dan je funkcijski predpis $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x}$, $\cos x \neq 0$.

a) Poenostavi izraz $\dfrac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x}$, $\cos x \neq 0$.

b) Izračunaj $f(\frac{4\pi}{3})$.

c) Izračunaj ničle funkcije f.

6. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

29. marec 2006

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	D	C	B	D	B	E

A1. Iskano število označimo z x in zapišemo zvezo $\frac{5}{6} \cdot x = 25$, od koder dobimo $x = 30$. Uporabimo še zvezo $\frac{6}{5} \cdot x = y$. Izračunamo $y = 36$.

A2. Izraz $a^2 - 4$ razstavimo $(a+2)(a-2)$. Celoten izraz zapišemo v obliki ulomka $\frac{(a+2)(a-2)}{a-2}$, ga okrajšamo in dobimo $a + 2$.

A3. Število 152 zapišemo v obliki razcepa na praštevila: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19$, od koder ugotovimo, da so njegovi delitelji: 1, 2, 4, 8, 19, 38, 76 in 152. Število 152 ima 8 deliteljev.

A4. Neenačbo zapišemo v obliki $4a > 1$, njena rešitev je $a > \frac{1}{4}$ ali $a > 0{,}25$.

A5. Cena računalnika, znižana za 20 %, znaša 80 000 SIT. Če to ceno povečamo za 20 %, dobimo 96 000 SIT.

A6. Če dani izraz poenostavimo, dobimo $1 - (\frac{1}{4})^{-1} - (\frac{1}{3})^{-2} = 1 - 4 - 9 = -12$, pravilen odgovor je E.

II. DEL

B1. Najprej razstavimo imenovalec prvega ulomka $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$, nato poenostavimo izraz v oklepaju: $\frac{-x+2}{(x+1)(x-1)}$. Končno izvedemo deljenje ulomkov kot množenje z nasprotno vrednostjo $\frac{-x+2}{(x-1)^2(x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{-x+2}$, po krajšanju pa dobimo $\frac{1}{x-1}$.

Razcep prvega imenovalca $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ ....1 točka
Določitev skupnega imenovalca izraza v oklepaju ....1 točka
Razširitev na skupni imenovalec...1 točka

Deljenje .... 1 točka
Krajšanje ulomkov .... 1 točka
Rezultat $\frac{1}{x-1}$ .... 1 točka

B2. Naj bosta iskani števili a in b. Tedaj je $a+b=42$, po osnovnem izreku o deljenju pa še $a=3b+2$. Iz prve enačbe izrazimo $a=42-b$ in to upoštevamo v drugi: $42-b=3b+2$. Od tod dobimo $b=10$. Izračunamo še $a=32$. Iskani števili sta 32 in 10.

Zapis vsote $a+b=42$ .... 1 točka
Upoštevanje osnovnega izreka o deljenju $a=3b+2$ .... 1 točka
Zapis enačbe $42-b=3b+2$ .... 1 točka
Rešitev enačbe $b=10$ .... 1 točka
Izračun $a=32$ .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka

B3. Naj bo x število dijakov iz Ljubljane, y število dijakov iz Celja, z pa število dijakov iz Maribora. Tedaj velja $x+y+z=70$, $x+z=y$ in $y+z=6x$. Rešitev sistema je $x=10,\ y=35,\ z=25$. Iz Ljubljane je bilo 10 dijakov, iz Celja 35 dijakov, iz Maribora pa 25 dijakov.

Zapis sistema $\begin{matrix} x+y+z=70 \\ x+z=y \\ y+z=6x \end{matrix}$ .... 2 točki
Rešitev sistema $x=10,\ y=35,\ z=25$ .... 3 točke
Odgovor .... 1 točka

B4. Naj bodo $x,\ x+1,\ x+2$ zaporedna cela števila. Upoštevamo besedilo naloge in zapišemo $x(x+1)(x+2)+(x+1)$. Izpostavimo skupni faktor $(x+1)(x^2+2x+1)$ in poenostavimo izraz. Dobimo $(x+1)^3$.

Zapis števil $x,\ x+1,\ x+2$ .... 1 točka
Zapis produkta treh zaporednih števil $x(x+1)(x+2)$ .... 1 točka
Zapis vsote $x(x+1)(x+2)+(x+1)$ .... 1 točka
Izpostavljen skupni faktor $(x+1)(x^2+2x+1)$ .... 1 točka
Poenostavitev izraza $(x+1)(x+1)^2$ .... 1 točka
Zapis $(x+1)^3$ .... 1 točka

Drugi letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	D	B	E	C	D	D

A1. Preverimo, da točke A, B in C ne ležijo na isti premici, prav tako pa $d(A,B) \neq d(A,C)$. Te točke so oglišča trikotnika.

A2. Izmed danih enačb je le enačba $\frac{2x}{3}-1=3y$ linearna in predstavlja premico.

A3. Presečišče kotnih simetral trikotnika je središče včrtane krožnice, presečišče simetral stranic pa središče očrtane krožnice trikotnika, ki lahko leži v zunanjosti trikotnika. Središče trikotniku včrtane krožnice ni nujno težišče tega trikotnika. Višinska točka trikotnika je lahko v zunanjosti trikotnika (topokotni trikotnik).

A4. Kot x je obodni kot nad lokom, katerega središčni kot meri $360^\circ-164^\circ$, zato meri polovico kota 196°, kar je 98°.

A5. Izračunamo: $\left(\sqrt{\left(\sqrt{(\sqrt{2})^2}\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2.$

A6. Izraz uredimo: $\dfrac{7^{2n+3+3n+2}}{7^{2+5n}}=\dfrac{7^{5n+5}}{7^{5n+2}}=7^3=343.$

II. DEL

B1. Izračunamo neznano koordinato točke A tako, da vstavimo znano koordinato v enačbo premice $4x-3y+27=0$. Neznana koordinata ima vrednost $y=13$. Podobno izračunamo neznano koordinato točke B: $x=0$. Uporabimo obrazec za razdaljo med točkama, vstavimo podatke $\sqrt{(0-3)^2+(9-13)^2}$ in izračunamo razdaljo 5 enot.

Izračun koordinate točke A: $y=13$ .... 1 točka
Izračun koordinate točke B: $x=0$ .... 1 točka
Zapis obrazca za razdaljo med točkama .... 1 točka
Pravilno vstavljeni podatki $\sqrt{(0-3)^2+(9-13)^2}$ .... 1 točka
Poenostavitev $\sqrt{9+16}$ .... 1 točka
Rezultat 5 .... 1 točka

B2. Iz razmerja $\alpha:\beta=1:2$ izrazimo $\alpha=t$ in $\beta=2t$. Upoštevamo, da je tretji kot enak aritmetični sredini: $\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{3t}{2}$. Ker je vsota notranjih kotov trikotnika enaka 180°, zapišemo enačbo $t+2t+\frac{3t}{2}=180^\circ$. Rešitev enačbe je $t=40^\circ$. Tako je $\alpha=40^\circ$, $\beta=80^\circ$ in $\gamma=60^\circ$.

Zapis zvez $\alpha=t$ in $\beta=2t$ .... 1 točka
Upoštevanje aritmetične sredine in zapis $\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{3t}{2}$ .... 1 točka
Upoštevanje vsote notranjih kotov trikotnika $t+2t+\frac{3t}{2}=180^\circ$ .... 1 točka
Izračun $t=40^\circ$ .... 2 točki
Rešitve $\alpha=40^\circ$, $\beta=80^\circ$, $\gamma=60^\circ$ .... 1 točka

B3. Racionaliziramo imenovalec prvega ulomka v oklepaju $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ in delno korenimo imenovalec drugega ulomka $\sqrt{8}+\sqrt{12}=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. Izpostavimo skupni faktor v imenovalcu drugega ulomka in krajšamo. Drugi ulomek racionaliziramo $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Končno seštejemo $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$ in delimo $2\sqrt{3}:\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$. Dobimo rezultat 6.

Racionalizacija prvega ulomka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ .... 1 točka
Delno korenjenje imenovalca drugega ulomka: $\sqrt{8}+\sqrt{12}=2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ .... 1 točka

Racionalizacija drugega ulomka $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ .... 1 točka
Seštevek v oklepaju $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$ .... 1 točka
Deljenje $2\sqrt{3}:\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$ .... 1 točka
Izračun vrednosti izraza 6 .... 1 točka

B4. V izrazu A zmnožimo notranja korena, da dobimo $\sqrt[3]{\sqrt{81-17}}$, nato pa nadaljujemo z računanjem: $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{8}=2$. Podobno naredimo v izrazu B. Dobimo: $\sqrt{\sqrt[3]{121-57}}=\sqrt{\sqrt[3]{64}}=2$. Izraza imata res enaki celi vrednosti.

Množenje notranjih korenov izraza A: $=\sqrt[3]{\sqrt{81-17}}$ .... 1 točka
Izračun $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{8}$ .... 1 točka
Rezultat 2 .... 1 točka
Množenje notranjih korenov izraza B: $=\sqrt{\sqrt[3]{121-57}}$ .... 1 točka
Izračun $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}$ .... 1 točka
Rezultat 2 .... 1 točka

Tretji letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	B	D	E	B	C	A

A1. Da bi se graf kvadratne funkcije dotikal abscisne osi, mora veljati $D=0$. Vstavimo podatke v obrazec za D in dobimo $D=m^2-16$. Enačimo z 0 in dobimo rešitev $m=\pm 4$.

A2. Upoštevamo ničelno obliko kvadratne funkcije. Iz slike odčitamo ničli in začetno vrednost. Vstavimo podatke in izračunamo $a=-1$. Ustrezen predpis narisane funkcije je $f(x)=-(x-1)(x-3)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$. Pravilni odgovor je torej D.

A3. Narišimo skico. Iz skice je razvidno, da je diagonala kvadrata $d=2r$ oziroma $d=a\sqrt{2}$. Od tod imamo $2r=a\sqrt{2}$. Izrazimo dolžino stranice $a=r\sqrt{2}$. Pravilen je odgovor E.

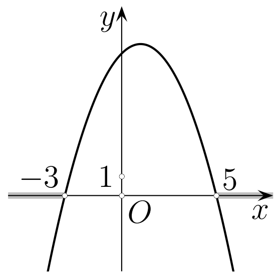
A4. Denimo, da krogla tehta k, stožec s in kocka k_o. Tedaj velja $2k+s=k_o$ in $3k=s+k_o$. Odštejemo enačbi, pa imamo $s-k=-s$. Iz te zveze izrazimo $2s=k$, kar pomeni, da 2 stožca tehtata enako kot krogla.

A5. Funkcija doseže začetno vrednost pri $x=0$, imamo torej $f(0)=-2\cdot 2^{3\cdot 0-1}+4=-2\cdot\frac{1}{2}+4=3$.

A6. Upoštevamo $0=\log_4(25+a)-2$. To poenostavimo v $2=\log_4(25+a)$, od koder dobimo $16=25+a$ in končno $a=-9$.

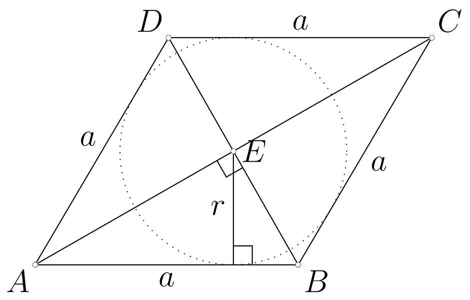
II. DEL

B1. Kvadratno neenačbo rešimo grafično. Poiščemo ničli $x_1 = 5, x_2 = -3$, rešitev pa predstavimo grafično. Odčitamo ustrezna intervala in zapišemo $(-\infty, -3] \bigcup [5, \infty)$.



Zapis enačbe $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{15}{2} = 0$ .... 1 točka
Preureditev enačbe $x^2 - 2x - 15 = 0$ .... 1 točka
Razcep $(x-5)(x+3) = 0$ .... 1 točka
Ničli $x_1 = 5,\ x_2 = -3$ .... 1 točka
Grafična predstavitev .... 1 točka
Odgovor $(-\infty, -3] \bigcup [5, \infty)$ .... 1 točka

B2. Na skici romba označimo točko E, ki je presečišče diagonal. Diagonali se pravokotno sekata in razpolavljata. Trikotnik ABE je pravokotni trikotnik z dolžinami stranic 5 cm, 12 cm in 13 cm. Ploščina tega trikotnika je 30 cm^2. Sklepamo, da višina na stranico AB v tem trikotniku meri $\frac{60}{13}$ cm in da je ta višina tudi polmer včrtanega kroga.



Na skici romba označena točka E, ki je presečišče diagonal .... 1 točka
Sklepanje:
diagonali pravokotnika se razpolavljata in sta pravokotni .... 1 točka
Trikotnik ABE je pravokotni trikotnik .... 1 točka
Izračun ploščine tega trikotnika 30 cm^2 .... 1 točka
Sklepanje:
višina na stranico AB v tem trikotniku meri $\frac{60}{13}$ cm .... 1 točka
Sklepanje:
Ta višina je tudi polmer včrtanega kroga .... 1 točka

B3. Upoštevamo $0{,}125 = 2^{-3}$, $4^{2x-3} = 2^{4x-6}$ in $(\frac{\sqrt{2}}{8})^{-x} = 2^{\frac{5x}{2}}$ ter enačbo preoblikujemo: $2^{4x-9} = 2^{\frac{5x}{2}}$. Odtod sklepamo $4x - 9 = \frac{5x}{2}$. Rešitev je $x = 6$.

Upoštevanje:
$0,125 = 2^{-3}$ .... 1 točka
$4^{2x-3} = 2^{4x-6}$ .... 1 točka
in $(\frac{\sqrt{2}}{8})^{-x} = 2^{\frac{5x}{2}}$ .... 1 točka
Preoblikovanje enačbe $2^{4x-9} = 2^{\frac{5x}{2}}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $4x - 9 = \frac{5x}{2}$ .... 1 točka
Rešitev enačbe $x = 6$ .... 1 točka

B4. Z grafa funkcije odčitamo ničlo $x = 4$, navpično asimptoto $x = 3$, definicijsko območje $D_f = (3, \infty)$ in zalogo vrednosti $Z_f = \mathbb{R}$. Imamo torej predpis $f(x) = \log_2(x-3)$.

Določitev definicijskega območja $D_f = (3, \infty)$ .... 2 točki
Določitev zaloge vrednosti $Z_f = \mathbb{R}$ .... 2 točki
Zapisan predpis dane krivulje $f(x) = \log_2(x-3)$ .... 2 točki

Četrti letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	C	D	E	C	B	A

A1. Upoštevamo osnovni izrek o deljenju polinomov: $p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$. Vstavimo $k(x)$, $q(x)$ in $r(x)$, pomnožimo in seštejemo ter dobimo $p(x) = 3x^3 - 11x^2 + 31x - 33$.

A2. V vseh ponujenih odgovorih so polinomi stopnje 6, razen v odgovoru C, kjer je stopnje 7.

A3. Za vsako realno število x je $x^2 + 4 \geq 4 > 0$, zato ima dani ulomek za vsak x pozitivno vrednost. Za nobeno realno število x nima vrednosti, manjše ali enake 0.

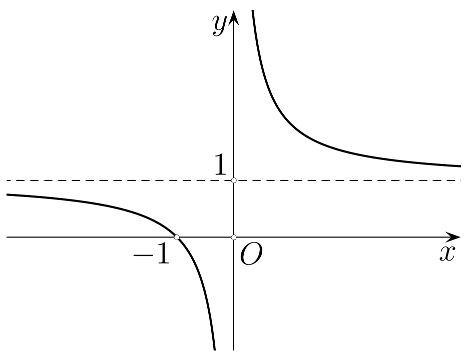
A4. Izračunamo: $\dfrac{(1-\sin 30^\circ)(1+\cos 60^\circ)}{(1+\cos 30^\circ)(1-\sin 60^\circ)} : (2+\tan 45^\circ)^2 = \dfrac{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})}{(1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\frac{\sqrt{3}}{2})} : (2+1)^2 = \dfrac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}} : 9 = \dfrac{3\cdot 4}{4\cdot 1\cdot 9} = \dfrac{1}{3}$.

A5. Največja vrednost funkcije $\sin x$ je 1, zato je največja vrednost zmnožka $\pi \cdot \sin 4x$ enaka $\pi \cdot 1 = \pi$.

A6. Upoštevamo, da je $a_7 = a_1 \cdot q^6$, pa imamo $\frac{1}{27} = 27 \cdot q^6$, od koder dobimo, da je $q = \pm\frac{1}{3}$. Ker ima zaporedje same pozitivne člene, je dvanajsti člen enak $a_{12} = a_1 \cdot q^{11} = 27 \cdot (\frac{1}{3})^{11} = (\frac{1}{3})^8 = \frac{1}{3^8}$.

II. DEL

B1. Predpis funkcije preoblikujemo v obliko $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Iz števca razberemo ničlo $x = -1$, iz imenovalca pol $x = 0$ ter iz količnika vodilnih koeficientov števca in imenovalca vodoravno asimptoto $y = 1$. Upoštevamo, da funkcija ni definirana v polu, pa imamo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Zapisana ničla $x = -1$ .... 1 točka
Zapisan pol $x = 0$ .... 1 točka
Zapisana vodoravna asimptota $y = 1$ .... 1 točka
Zapis definicijskega območja $D_f = \Re \setminus \{0\}$ .... 1 točka
Narisan graf (vsaka veja) .... $1 + 1$ točka

B2. Prvo ničlo $x_1 = 1$ lahko uganemo in jo preverimo s Hornerjevim algoritmom. Količnik danega polinoma in linearnega polinoma $x - 1$ je polinom druge stopnje, ničli lahko izračunamo z uporabo obrazca za iskanje ničel kvadratne funkcije. Iskane ničle so $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ in $x_3 = -\frac{1}{2}$, vsota ničel pa $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

Postopek, ki privede do prve ničle .... 1 točka
Izračunana prva ničla .... 1 točka
Kvadratna enačba, katere rešitvi sta nadaljnji ničli .... 1 točka
Izračunani ničli .... $1 + 1$ točka
Izračunana vsota $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ .... 1 točka
OPOMBA: Ničle so $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

B3. Upoštevamo, da velikosti kotov tvorijo aritmetično zaporedje. Naj bo a_1 najmanjši kot in uporabimo zvezo za vsoto 6 členov aritmetičnega zaporedja $s_6 = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$ ter podatek o vsoti notranjih kotov šestkotnika $6\cdot 180° - 360° = 720°$. Zapišemo enačbo $\frac{6(2a_1+5d)}{2} = 720$, od koder dobimo $2a_1 + 5d = 240$ in še $a_1 = \dfrac{240-5d}{2} = 120 - \dfrac{5d}{2}$. Število d je pozitivno, zaradi zadnje zveze med a_1 in d pa sklepamo, da je sodo. Največji kot šestkotnika je $a_6 = a_1 + 5d$. S poskušanjem in preverjanjem ugotovimo, da lahko največji kot takega šestkotnika meri $175°$.

Nalogo lahko rešimo drugače. Pri pravilnem šestkotniku so vsi koti veliki $120°$. Če naj vsak kot šestkotnika meri celo število stopinj in naj koti tvorijo aritmetično zaporedje, merita srednja kota po velikosti $(120-a)°$ in $(120+a)°$, kjer je a naravno število. Tedaj je razlika med velikostima teh dveh kotov $(2a)°$, kar je ravno *diferenca* aritmetičnega zaporedja. To pomeni, da največji kot meri $(120+a+2a+2a)° = (120+5a)°$. Ker je vsak kot konveksnega večkotnika manjši od $180°$, meri največji kot takega šestkotnika $175°$.

Upoštevanje vsote aritmetičnega zaporedja $s_6 = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$ .... 1 točka
Upoštevanje vsote notranjih kotov šestkotnika .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2} = 720°$ .... 1 točka
Rešitev enačbe oz. izražen kot $\alpha_1 = \frac{240°-5d}{2}$ .... 1 točka
Upoštevanje pogojev $d \in \mathbb{Z},\ d > 1$ in sklep d je sodo število .... 1 točka
Rešitev $\alpha = 175°$ .... 1 točka

B4. Funkcijski predpis uredimo, tako da najprej izpostavimo skupni faktor $f(x) = \frac{\sin x(1-\sin^2 x)}{\cos^3 x}$. Upoštevamo $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$. Zapišemo $f(x) = \tan x$. Vrednost funkcije izračunamo: $f(\frac{4\pi}{3}) = \tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$. Ničle izračunamo iz $\tan x = 0$ oziroma $\sin x = 0$. Dobimo rešitev $x_k = k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Izpostavljen skupni faktor v števcu $f(x) = \frac{\sin x(1-\sin^2 x)}{\cos^3 x}$ .... 1 točka
Zamenjava $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ .... 1 točka
Zapis $f(x) = \tan x$ .... 1 točka
Izračunana vrednost $f(\frac{4\pi}{3}) = \tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ .... 1 točka
Upoštevanje $\tan x = 0$, če je $\sin x = 0$ .... 1 točka
Rešitev $x_k = k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ .... 1 točka