Priprave na MMO 2024 – 6. domača naloga

1. Naj bo ABC enakostraničen trikotnik, O pa središče njegove očrtane krožnice. Naj bosta D in E taki točki na krožnici, očrtani trikotniku BCO, da so točke A, D in E kolinearne. Naj bosta P in Q razpolovišči daljic BD in BE zaporedoma. Dokaži, da so točke C, P, Q in O koncilkične.

2. Naj bo H višinska točka trikotnika ABC in P točka na premici AH. S Q in R označimo pravokotni projekciji točke P na AB in AC zaporedoma. Naj premici PQ in PR sekata BC v točkah S in T zaporedoma. Naj premica QR seka krožnici očrtani trikotnikoma BQS in CRT še v X in Y zaporedoma. Dokaži, da se premice SX, TY in AH sekajo v eni točki.

3. Naj bo ABC ostrokoten trikotnik, v katerem velja $|AB| > |AC|$, z očrtano krožnico Ω. Naj bo O središče Ω, M pa razpolovišče tistega loka BC krožnice Ω, ki ne vsebuje A. Notranji simetrali kotov AOB in COA sekata krožnico s premerom AM zaporedoma še v P in Q. Naj bo R taka točka na premici PQ, da velja $|AR| = |MR|$. Dokaži, da je $AR \parallel BC$.

4. Naj bo $ABCD$ paralelogram. Točki E in F ležita na daljicah CD in BC zaporedoma tako, da velja
$$2 \cdot \angle AEB = \angle ADB + \angle ACB \quad \text{in} \quad 2 \cdot \angle DFA = \angle DCA + \angle DBA.$$
Naj bo K središče očrtane krožnice trikotnika ABD. Dokaži, da je $|KE| = |KF|$.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **18. 2. 2024** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius, Citius, Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .... (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

.... (*kraj in datum*) Podpis: