Priprave na MMO 2024 – 6. domača naloga

1. Naj bo ABC enakostraničen trikotnik, O pa središče njegove očrtane krožnice. Naj bosta D in E taki točki na krožnici, očrtani trikotniku BCO, da so točke A, D in E kolinearne. Naj bosta P in Q razpolovišči daljic BD in BE zaporedoma. Dokaži, da so točke C, P, Q in O koncikliČne.

2. Naj bo H višinska točka trikotnika ABC in P točka na premici AH. S Q in R označimo pravokotni projekciji točke P na AB in AC zaporedoma. Naj premici PQ in PR sekata BC v točkah S in T zaporedoma. Naj premica QR seka krožnici očrtani trikotnikoma BQS in CRT še v X in Y zaporedoma. Dokaži, da se premice SX, TY in AH sekajo v eni točki.

3. Naj bo ABC ostrokoten trikotnik, v katerem velja $|AB| > |AC|$, z očrtano krožnico Ω. Naj bo O središče Ω, M pa razpolovišče tistega loka BC krožnice Ω, ki ne vsebuje A. Notranji simetrali kotov AOB in COA sekata krožnico s premerom AM zaporedoma še v P in Q. Naj bo R taka točka na premici PQ, da velja $|AR| = |MR|$. Dokaži, da je $AR \parallel BC$.

4. Naj bo $ABCD$ paralelogram. Točki E in F ležita na daljicah CD in BC zaporedoma tako, da velja

$$2 \cdot \angle AEB = \angle ADB + \angle ACB \quad \text{in} \quad 2 \cdot \angle DFA = \angle DCA + \angle DBA.$$

Naj bo K središče očrtane krožnice trikotnika ABD. Dokaži, da je $|KE| = |KF|$.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **18. 2. 2024** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius, Citius, Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

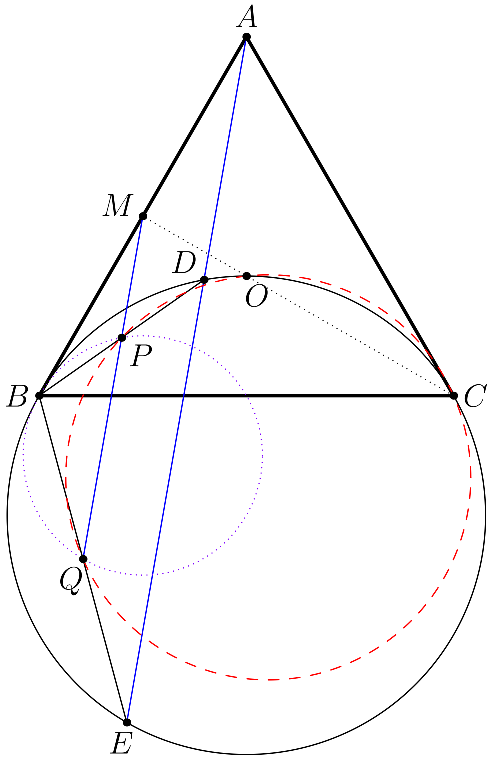
Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .... (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

.... (*kraj in datum*) Podpis:

Rešitve

1. Naj bo M razpolovišče stranice AB. Ker sta P in Q razpolovišči daljic BD in BE, sledi, da so točke P, Q in M kolinearne. Kolinearne so tudi točke C, M in O, saj je trikotnik enakostraničen.



Ker je $\angle OCB = 30° = \angle OBA$, se krožnica očrtana trikotniku BCO dotika premice AB. Podobno je

$$\angle PQB = \angle DEB = \angle DCB = \angle DBA,$$

zato enako velja tudi za krožnico očrtano trikotniku BPQ. Tako s potenco točke M dobimo

$$MO \cdot MC = MB^2 = MP \cdot MQ,$$

od koder sledi koncikličnost točk C, O, P in Q.

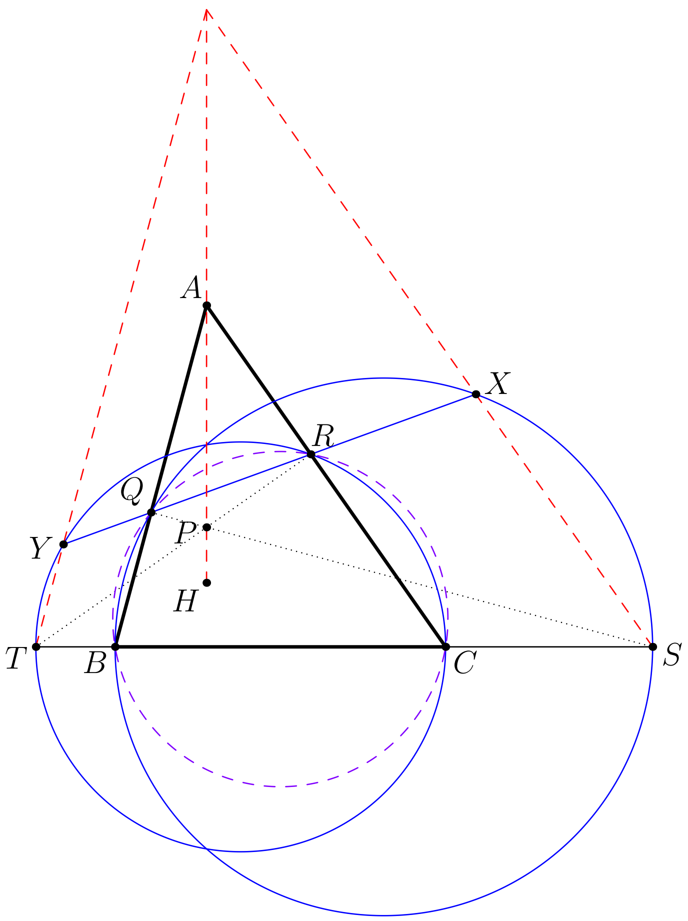
2. Opazimo, da so po Talesovem izreku točke A, P, Q in R konciklične. Z nadaljnjim upoštevanjem parov pravokotnih premic lahko izračunamo

$$\angle STR = 90° - \angle ACB = \angle PAC = \angle PQR,$$

od koder sledi, da so konciklične tudi točke Q, R, S in T. Če k tej krožnici dodamo še krožnici iz navodila naloge, opazimo, da sta RT in QS dve izmed njihovih potenčnih premic. Njihovo potenčno središče je torej točka P, skozi katero poteka tudi zadnja potenčna premica. Ker sta BS in CT premera krožnic, mora ta torej biti pravokotna na premico BS. Zadnja potenčna premica je torej kar premica AH.

Posebej, točka A leži na potenčni premici, zato je

$$AQ \cdot AB = AR \cdot AC$$



in so točke B, C, Q ter R koncikliče.

Po Reimovem izreku za krožnici očrtani štirikotnikoma $BCRQ$ in $BSXQ$ sledi, da sta premici CR in XS vzporedni. Tako dobimo še

$$\angle CTY = \angle CRY = \angle SXY,$$

od koder dobimo še, da so konciklične točke S, T, X in Y. Premice TY, SX in AH so tako kar potenčne premice krožnic BQS, CRT in STX, zato se sekajo v eni točki.[1]

3. Naj bo N razpolovišče daljice AM in naj bo X drugo presečišče vzporednice k BC skozi A s krožnico s premerom AM. Po Talesovem izreku je $MX \perp AX$, ker pa je tudi $MO \perp AX$, sledi, da so točke M, O in X kolinearne. Tako sledi, da je $\angle OXA = 90° = \angle ANO$, zato so točke A, N, O in X konciklične.

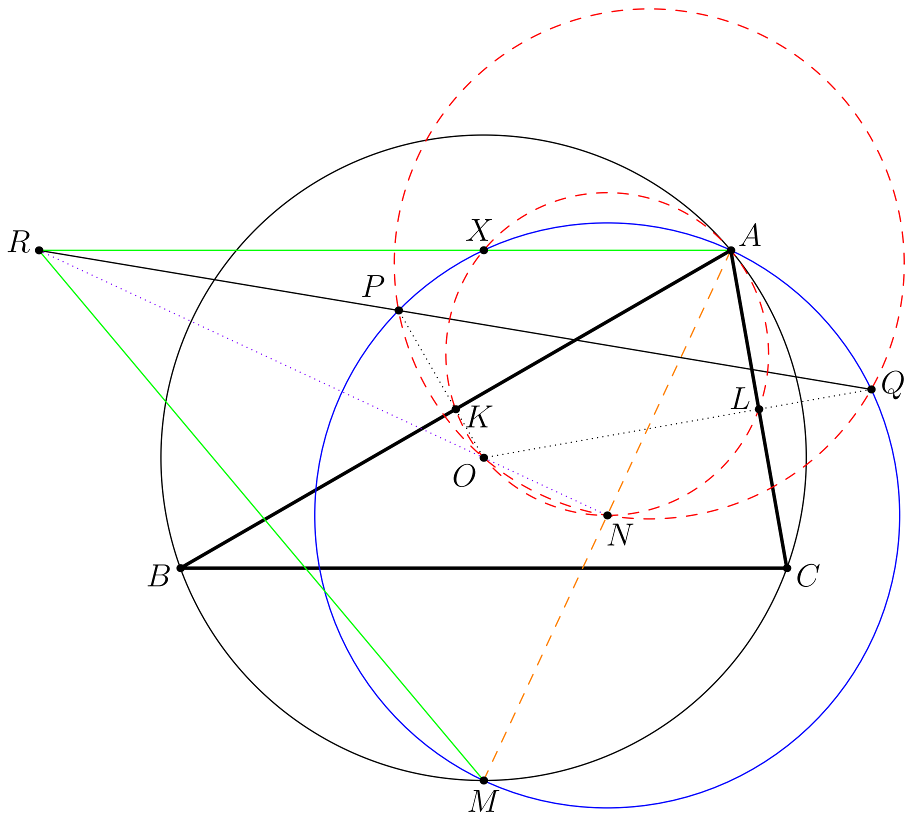
   Če s K in L zaporedoma označimo razpolovišči daljic AB in AC, ki prav tako ležita na krožnici očrtani štirikotniku $ONAX$, dobimo

$$\angle NOQ = \angle NAL = \angle KAN = \angle PON.$$

   Sledi, da je ON zunanja simetrala kota $\angle POQ$. Ker poleg tega velja še $|NP| = |NQ|$ (točka N je namreč središče krožnice s premerom AM), so točke P, Q, O in N konciklične.

[1] Ne morejo biti vzporedne, saj X in Y ležita na istem bregu premice BC, zato že premici SX in TY nista vzporedni.

Iz enakosti $|RA| = |RM|$ sledi, da R leži na simetrali daljice AM, kar je natanko premica ON. Ker sta ON in PQ dve izmed potenčnih premic krožnic očrtanih trikotnikom APQ, AON in OPQ, točka R leži tudi na tretji. To pa je natanko premica AX, ki je vzporedna k BC.



4. Naj bo M presečišče diagonal paralelograma $ABCD$ in P taka točka na poltraku MC, da je $\angle DPB = 90°$. Tedaj je

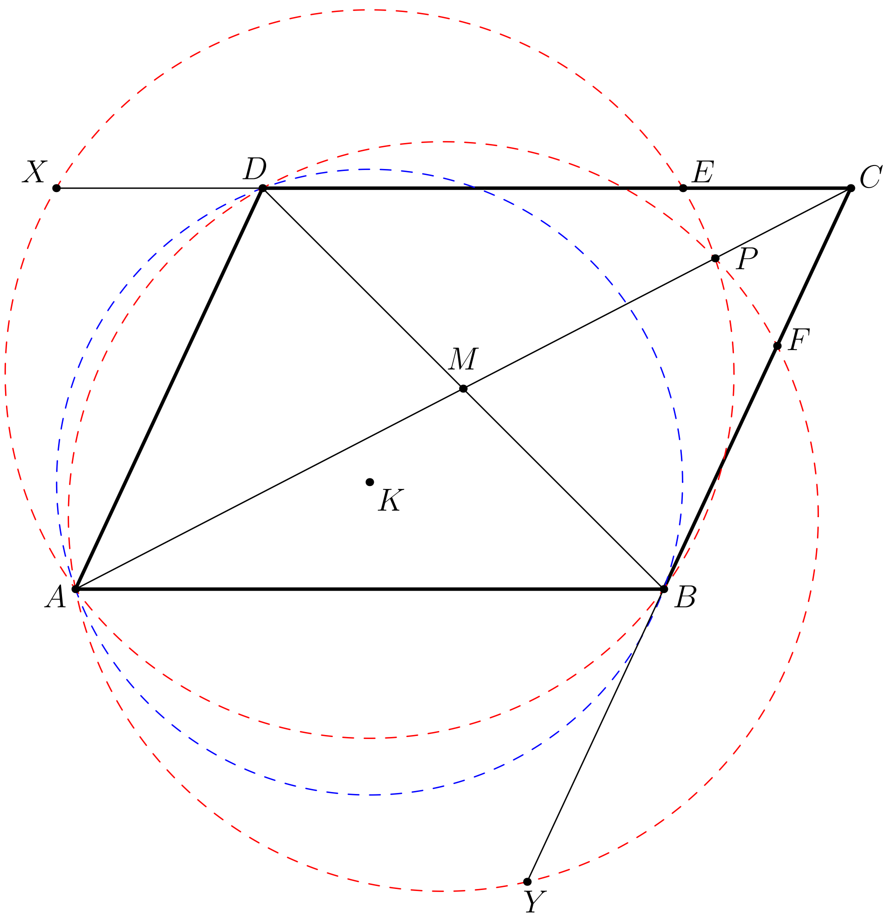
$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle ACB) = \angle AEB,$$

zato so točke A, B, E in P koncikliène. Simetrično so konciklične tudi točke A, D, P in F.

Naj bo X drugo presečišče krožnice očrtane trikotniku ABE s premico CD. Podobno naj bo Y drugo presečišče krožnice očrtane trikotniku ADF s premico BC. Ker C leži na potenčni premici teh dveh krožnic, sledi

$$CF \cdot CY = CE \cdot CX,$$

zato so točke E, F, X in Y konciklične. Središče te krožnice je presečišče simetral daljic EX in FY. Ker pa je $ABEX$ tetiven trapez, je enakokrak, zato simetrala daljice EX sovpada s simetralo daljice AB. Podobno simetrala daljice FY sovpada s simetralo daljice AD. Tako sledi, da je središče te krožnice kar točka K, zato je res $|KE| = |KF|$.


X
D
E
C
P
F
M
K
A
B
Y