Priprave na MMO 2025 – 1. domača naloga

1. *Telefonska številka* je poljubno zaporedje $d_1d_2\cdots d_9$, kjer so $d_1, d_2, \dots, d_9$ ne nujno različna števila iz množice $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Pravimo, da je telefonska številka *ježeva*, če je zaporedje $d_1d_2d_3d_4$ enako vsaj enemu izmed zaporedij $d_5d_6d_7d_8$ in $d_6d_7d_8d_9$. Koliko je ježevih telefonskih številk?

2. Vsako polje v tabeli velikosti 5×41 je pobarvano z rdečo ali modro barvo. Dokaži, da v tabeli obstajajo takšne tri vrstice in trije stolpci, da je vseh 9 polj, v katerih se sekata katera izmed teh vrstic in stolpcev, enake barve.

3. Dijak od svojega profesorja nekega dne dobi 9 nalog, ki so označene po vrsti glede na težavnost z $1, 2, \dots, 9$, kjer je naloga 1 najlažja in 9 najtežja. Profesor jih čez dan pošilja urejene po težavnosti, začne z najlažjo. Ko ima dijak čas, reši najtežjo izmed do takrat prejetih še nerešenih nalog. Zanima nas, katere izmed nalog bo dijak rešil po kosilu in v kakšnem vrstnem redu, če vemo, da je nalogo 8 že rešil pred kosilom in da bo čez dan rešil vse naloge. Določi število vseh možnih zaporedij nalog, ki jih bo dijak rešil po kosilu.

4. Naj bosta m in n naravni števili, pri čemer je $m \geq n$. Dokaži, da velja

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m-k}{n} \binom{n}{k} = 1.$$

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **17. 11. 2024** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius, Citius, Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .... (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

.... (*kraj in datum*) Podpis:

Rešitve

1. Vemo, da mora biti v ježevi telefonski številki zaporedje $d_1d_2d_3d_4$ enako vsaj enemu izmed zaporedij $d_5d_6d_7d_8$ in $d_6d_7d_8d_9$. Ločimo dva primera.

   - Denimo, da sta zaporedji $d_5d_6d_7d_8$ in $d_6d_7d_8d_9$ enaki. To bo veljalo natanko tedaj, ko bo $d_5 = d_6$, $d_6 = d_7$, $d_7 = d_8$ in $d_8 = d_9$, torej ko so vsa števila v zaporedju $d_5d_6d_7d_8d_9$ enaka. V tem primeru morajo biti vsa števila v ježevi telefonski številki enaka. Takšnih ježevih telefonskih številk je torej 10.
   - Ostane nam še primer, ko sta zaporedji $d_5d_6d_7d_8$ in $d_6d_7d_8d_9$ različni. Iz prejšnjega primera vemo, da to velja natanko takrat, ko niso vsa števila v zaporedju $d_5d_6d_7d_8d_9$ enaka. Za izbiro zaporedja $d_5d_6d_7d_8d_9$ imamo $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ možnosti, izmed teh je 10 takih, kjer so vsa števila enaka. Ko smo izbrali zaporedje $d_5d_6d_7d_8d_9$, lahko zaporedje $d_1d_2d_3d_4$ izberemo na 2 načina (ali je enako zaporedju $d_5d_6d_7d_8$ ali $d_6d_7d_8d_9$). Sledi, da je takšnih ježevih telefonskih številk $(10^5 - 10) \cdot 2 = 199980$.

   Skupaj je torej $199980 + 10 = 199990$ različnih ježevih telefonskih številk.

2. Ker je v posameznem stolpcu 5 polj in imamo le 2 barvi, po Dirichletovem principu v vsakem stolpcu obstajajo vsaj 3 polja, ki so enake barve. Podobno po Dirichletovem principu za neko barvo velja, da obstaja vsaj 21 stolpcev, v katerih so najmanj 3 polja pobarvana s to barvo. Brez škode za splošnost recimo, da je to modra. Za izbiro 3 modrih polj imamo v posameznem stolpcu $\binom{5}{3} = 10$ možnosti. Po Dirichletovem principu sledi, da obstajajo vsaj

   $$\left\lceil \frac{21}{10} \right\rceil = 3$$

   stolpci, v katerih so pobarvana 3 modra polja v istih vrsticah. Vseh 9 kvadratkov, kjer se sekajo ti 3 stolpci in 3 vrstice, je torej pobarvanih modro.

3. Ločimo dva primera glede na to, ali je dijak nalogo 9 že rešil pred kosilom, ali pa jo bo rešil po kosilu.

   - Recimo, da je dijak nalogo 9 rešil pred kosilom. To pomeni, da je pred kosilom že dobil vse naloge. Če vemo, katere naloge mora dijak še rešiti po kosilu, je vrstni red reševanja enolično določen, saj jih rešuje po vrsti od najtežje do najlažje. Glede na to, kdaj so bile naloge poslane, mu lahko za reševanje po kosilu ostanejo katerekoli izmed prvih 7 nalog. Skupaj ima torej

     $$2^7 = 128$$

     možnosti.
   - Ostane nam še primer, ko bo dijak nalogo 9 rešil po kosilu. Vemo, da je pred kosilom že prejel vse ostale naloge, saj je že rešil nalogo 8. Recimo, da bo dijak po kosilu rešil k nalog. Ena izmed teh bo naloga 9. Ostalih $k-1$ lahko izberemo na

     $$\binom{7}{k-1}$$

     načinov. Za teh $k-1$ nalog je vrstni red, podobno kot v prejšnjem primeru, enolično določen. Kdaj bo rešil nalogo 9 pa je odvisno od tega, kdaj jo prejme. Za vrstni red reševanja izbranih k nalog ima dijak torej k možnosti. Če vemo, da mu je ostalo še k nalog, je skupaj možnih

$$k \cdot \binom{7}{k-1}$$

zaporedij nalog. Ker mora rešiti še vsaj 1 in največ 8 nalog, je vseh možnih zaporedij reševanja po kosilu

$$\sum_{k=1}^{8} k \cdot \binom{7}{k-1} = 1 \cdot \binom{7}{0} + 2 \cdot \binom{7}{1} + \cdots + 8 \cdot \binom{7}{7} = 576.$$

Število vseh možnih zaporedij nalog, ki jih bo dijak rešil po kosilu, je torej

$$128 + 576 = 704.$$

4. Za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$ naj bo A_i množica vseh podmnožic množice $\{1, 2, \ldots, m\}$ moči n, ki ne vsebujejo elementa i. Velja torej

$$A_i = \{S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}; |S| = n, i \notin S\}.$$

Vemo, da množica $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ vsebuje natanko vse podmnožice množice $\{1, 2, \ldots, m\}$ moči n razen $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sledi, da je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \binom{m}{n} - 1.$$

Po načelu vključitev in izključitev pa vemo, da je moč množice $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ enaka

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Če so $a_1, a_2, \ldots a_k$ takšna naravna števila, da je $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$, potem množica $A_{a_1} \cap A_{a_2} \cap \cdots \cap A_{a_k}$ vsebuje natanko vse podmnožice moči n množice $\{1, 2, \ldots, m\} \backslash \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$. Velja torej

$$|A_{a_1} \cap A_{a_2} \cap \cdots \cap A_{a_k}| = \binom{m-k}{n}.$$

Tako lahko zgornjo vsoto zapišemo kot

$$\binom{n}{1} \cdot \binom{m-1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \binom{m-2}{n} + \binom{n}{3} \cdot \binom{m-3}{n} - \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \cdot \binom{m-n}{n}.$$

Iz tega sledi

$$\binom{m}{n} - 1 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{m-k}{n} \binom{n}{k},$$

od koder dobimo

$$1 = \binom{m}{n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \binom{m-k}{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{m-k}{n} \binom{n}{k}.$$