Priprave na MMO 2025 – 2. domača naloga

1. Naj bo ABC trikotnik z očrtano krožnico Ω. Naj bo D presečišče nosilke višine iz A ter tangente v C na Ω. Podobno, naj bo E presečišče nosilke višine iz B ter tangente v C na Ω. Dokaži, da so točke A, B, D in E koncikliče.

2. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, v katerem velja $|AB| > |AC|$. Naj bo D točka na stranici AB, za katero velja $\angle ACD = \angle CBD$. Naj bo še E razpolovišče daljice BD in S središče trikotniku BCD očrtane krožnice. Dokaži, da so točke A, C, E in S koncikliče.

3. Naj bo $ABCD$ paralelogram in Ω krožnica, ki se paralelograma dotika v točkah K, L in M zaporedoma na stranicah AB, BC in CD. Dokaži, da premica KL razpolavlja višino iz C na AB.

4. Naj bo ABC ostrokoten trikotnik in I središče njemu včrtane krožnice. Pravokotnica skozi točko I na premico AI seka krožnico očrtano trikotniku ABC v točkah P in Q tako, da je P bližje B. Naj bo S drugo presečišče krožnic očrtanih trikotnikoma BPI in CQI. Dokaži, da je SI simetrala kota $\angle QSP$.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **8. 12. 2024** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius*, *Citius*, *Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .... (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

.... (*kraj in datum*) Podpis:

Rešitve

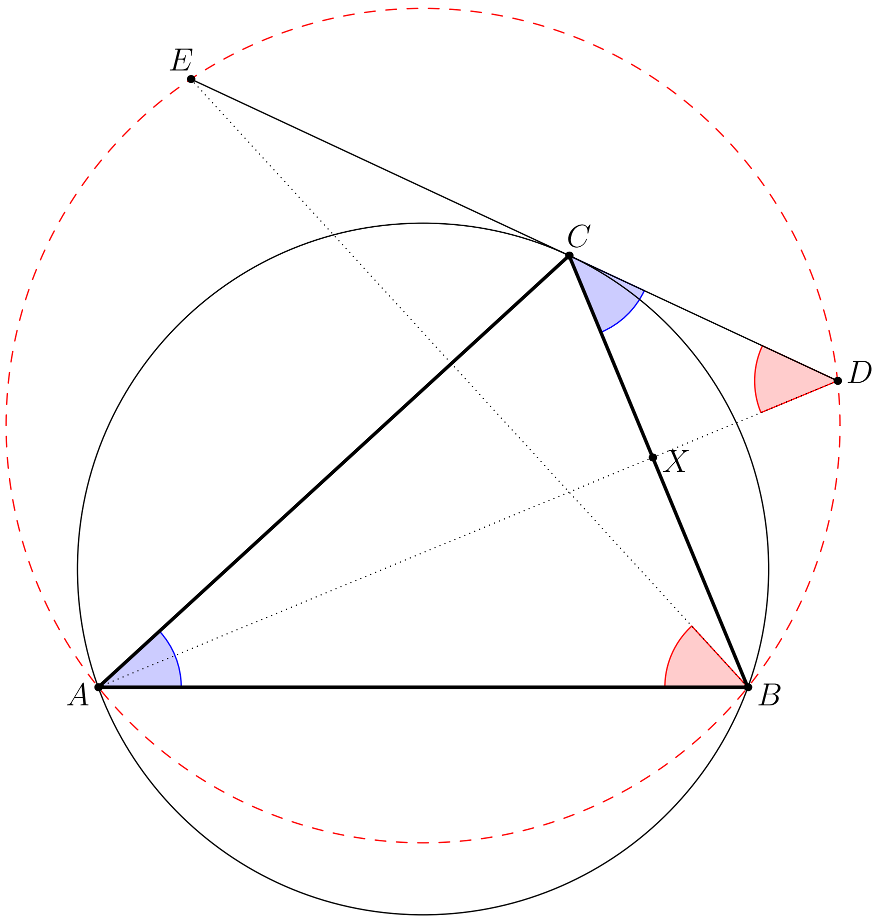
1. Opazimo, da zadošča pokazati enakost $\angle EDA = \angle EBA$. Naj bo X presečišče premic AD in BC, Y pa presečišče premic BE in AC. Opazimo, da sta trikotnika ABY in CDX pravokotna. Tako lahko izrazimo

   $$\angle EDA = \angle CDX = 90^\circ - \angle XCD = 90^\circ - \angle BCD$$

   in

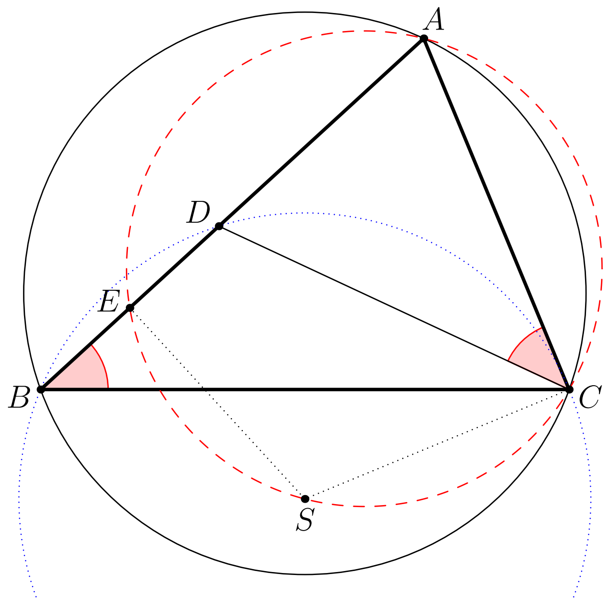
   $$\angle EBA = \angle YBA = 90^\circ - \angle BAY = 90^\circ - \angle BAC.$$

   Sledi, da moramo dokazati le še enakost $\angle BCD = \angle BAC$, ki pa velja po izreku o kotu med tangento in tetivo.



2. Pokažimo, da je $\angle SEA = \angle ACS = 90^\circ$ – po Talesovem izreku bo namreč sledila želena koncikličnost.

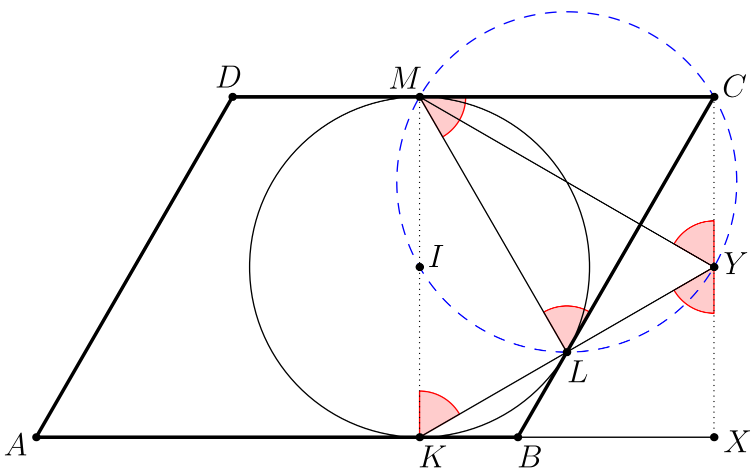
   Najprej opazimo, da je SBD enakokrak trikotnik z vrhom v S. Sledi, da je SE simetrala trikotnika, zato je res $DB \perp SE$. Za drugo pravokotnost bomo uporabili podano enakost kotov – po izreku o kotu med tangento in tetivo je namreč AC tangentna na krožnico očrtano trikotniku BCD. Ker je S središče te krožnice, res velja tudi $SC \perp AC$. Konicikličnost je s tem dokazana.



3. Naj bo X pravokotna projekcija točke C na premico AB, Y pa presečišče premic CX in KL. Naj bo še I središče krožnice Ω. Opazimo, da velja $IK \perp AB$ in $IM \perp CD$, ker pa sta AB in CD vzporedni, sklepamo, da so K, M in I kolinearne.

   Po izreku o kotu med tangento in tetivo vidimo, da je $\angle LKM = \angle LMC$. Ker sta tako MK kot CX pravokotni na AB, sta vzporedni, zato velja še $\angle KYX = \angle YKM$. Skupaj tako dobimo
$$\angle LMC = \angle LKM = \angle KYX = \angle LYC,$$
   od koder sklepamo, da so točke L, M, C in Y koncikliče. Znova lahko uporabimo izrek o kotu med tangento in tetivo, da dobimo $\angle LKM = \angle CLM$. Upoštevajoč zgornjo konciklčnost ugotovimo še $\angle CLM = \angle CYM$.

   Oglejmo si trikotnika KXY in MCY. Ker je $\angle CYM = \angle KYX$ in se ujemata še v pravem kotu, sta podobna. Še več, ker je $CMKX$ pravokotnik, je $|KX| = |CM|$, zato sta trikotnika skladna. Sledi da je $|CY| = |CX|$, kar smo želeli dokazati.



4. Zaradi konciklčnosti velja $\angle ISP = \angle IBP$ in $\angle QSI = \angle QCI$, zato je dovolj dokazati, da je $\angle IBP = \angle QCI$. Naj bosta X in Y zaporedoma drugi presečišči premic BI in CI z očrtano krožnico trikotnika ABC.

Znano je, da sta X in Y razpolovišči tistih lokov AC in AB, ki ne vsebujeta tretjega oglišča trikotnika. Še več, sta središči očrtanih krožnic trikotnikov ACI in ABI. Tako sledi, da je $|XA| = |XI|$ in $|YA| = |YI|$. Sklepamo, da je I zrcalna slika točke A čez premico XY, torej je $XY \perp AI$.

Če upoštevamo dobljeno vzporednost in koncikličnost, sledi

$$\angle XBP = \angle XYP = \angle QPY = \angle QCY,$$

kar smo želeli dokazati.