

Priprave na MMO 2025 – 5. domača naloga

1. Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Podana je tabela velikosti $n \times n$, v kateri manjka eno polje. Dokaži, da lahko s ploščicami velikosti 2×1 in 3×1 vedno pokrijemo celo tabelo, pri čemer se ploščice ne prekrivajo in manjkajoče polje ostane prazno.
2. Naj bo $n \geq 7$ naravno število. Pastir ima n koz, ki jih želi razdeliti v ograde tako, da je vsaka koza v natanko eni ogradi (v različnih ogradah je lahko različno število koz). Vsaka koza sovraži natanko 3 druge koze, pri čemer sovrašтво ni nujno vzajemno (če koza K_1 sovraži kozo K_2 ni nujno, da koza K_2 sovraži kozo K_1). Da bi se izognil konfliktom, želi pastir koze razvrstiti v ograde tako, da nobena koza ne sovraži koze, ki je v isti ogradi. Najmanj koliko različnih ograd potrebuje pastir, da lahko koze razvrsti na ta način?
3. Naj bo n naravno število. Dokaži, da obstaja tako naravno število k , da velja

$$2^n \mid 51^k - 17.$$

4. Naj bo S množica z 2025 elementi in $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq n \leq 2^{2025}$. Dokaži, da je mogoče vsaki podmnožici množice S dodeliti rdečo ali modro barvo tako, da veljajo naslednji pogoji:
 - unija poljubnih dveh rdečih podmnožic je tudi rdeča podmnožica,
 - unija poljubnih dveh modrih podmnožic je modra podmnožica,
 - rdečih podmnožic je natanko n .

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **23. 3. 2025** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius*, *Citius*, *Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

..... (*kraj in datum*)

Podpis: