

Priprave na MMO 2026 – 7. domača naloga

1. Določi vse polinome P s celoštevilskimi koeficienti z naslednjo lastnostjo: Za vsaki celi števil a in b , za kateri je $a + b \neq 0$, velja

$$a + b \mid P(a) - P(b).$$

2. Naj bo n sodo naravno število. Naj bo P moničen polinom z realnimi koeficienti stopnje $2n$. Denimo, da velja

$$P\left(\frac{1}{k}\right) = k^2$$

za vsako celo število k , za katero je $1 \leq |k| \leq n$. Določi vsa ostala realna števila x , za katera je $P\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$.

Opomba: Polinom je moničen, če je njegov vodilni koeficient enak 1.

3. Določi vse polinome P s celoštevilskimi koeficienti z lastnostjo, da za vsako naravno število n obstaja tako naravno število $k \leq 2026$, da velja

$$n \mid P(k^n).$$

4. Naj bosta n in k naravni števili, za kateri je $n \geq k$, in $a_1, a_2, \dots, a_k$ nenegativna realna števila. Na tabli je v vrsti zapisanih n ničel. Na vsakem koraku si Žiga izbere k zaporednih števil na tabli, nato pa prvega izmed teh poveča za a_1 , drugega za a_2 , in tako dalje do k -tega, ki ga poveča za a_k . Po nekaj korakih Žiga opazi, da je na tabli zapisanih n enakih pozitivnih števil. Dokaži, da so vsa izmed neničelnih števil $a_1, a_2, \dots, a_k$ enaka.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **8. 3. 2026** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »7. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a

ime in priimek
samostojno in brez pomoči drugih oseb.

izjavljam, da sem vse naloge reševal/a

Podpis:

kraj in datum