IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2010
Letnik 57
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 57 • ŠT. 6 • STR. 197–240 • NOVEMBER 2010

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2010, letnik 57, številka 6, strani 197–240

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

EULERJEVA ŠTEVILA V ANALIZI

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 11B68, 26A06, 60E99

V članku definiramo Eulerjeva števila. Pokažemo primere integralov, vsot in številskih vrst, kjer nastopajo Eulerjeva in Bernoullijeva števila. Obravnavan je tudi zakon recipročnega hiperboličnega kosinusa v teoriji verjetnosti.

EULER NUMBERS IN ANALYSIS

In this article, the Euler numbers are defined. We show examples of integrals, sums and series where the Euler and Bernoulli numbers occur. The hyperbolic secant distribution in probability theory is also discussed.

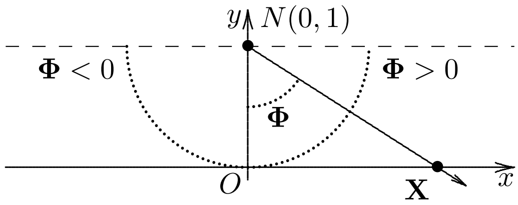
Uvod

Čeprav je v prispevku največ govora o *Eulerjevih številih* v analizi, ga pričenjamo v verjetnostnem računu s preprostim geometrijskim primerom, ki nas bo postopoma pripeljal do Eulerjevih števil in spremljajočih polinomov. Spoznali bomo nekaj zgledov v analizi, kjer nastopajo Eulerjeva števila, seznanili pa se bomo tudi s postopkom, kako lahko na hitro seštejemo nekatere alternirajoče vsote. Izogniti se ne bomo mogli *Bernoullijevim številom*, o katerih pa bomo zapisali le najnujnejše. Tudi sicer Eulerjeva in Bernoullijeva števila pogosto obravnavamo skupaj.

V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu (Oxy) iz točke $N(0,1)$ na ordinatni osi potegnemo poltrak, ki oklepa z osjo y slučajno izbrani kot $\mathbf{\Phi}$ (slika 1). Poltrak preseka os x v točki z absciso $\mathbf{X}$. Predpostavili bomo, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{\Phi}$ enakomerno porazdeljena na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

Geometrijskemu opisu lahko dodamo tudi fizikalno preobleko. V steni $y = 1$ je v točki N izvor delcev, ki potujejo v vseh smereh. Zanima nas, kako je porazdeljena abscisa $\mathbf{X}$, v kateri delec zadene os x, zadetek pa zazna primeren detektor. Pri tem predpostavimo, da je smer delcev popolnoma slučajna in porazdeljena enakomerno glede na kot $\mathbf{\Phi}$.

V nadaljevanju bomo v glavnem uporabljali definicije iz [4]. Porazdelitveno funkcijo katerekoli *zvezno* porazdeljene slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$ bomo



Slika 1. Slučajni spremenljivki $\mathbf{\Phi}$ in $\mathbf{X}$

označevali s $F_{\mathbf{X}}$, gostoto s $p_{\mathbf{X}}$, s $P[A]$ pa verjetnost dogodka A. Spomnimo:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = P[\mathbf{X} < x] = \int_{-\infty}^{x} p_{\mathbf{X}}(\xi)\, d\xi \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Zanima nas, kako je porazdeljena naša slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$, ki jo očitno povezuje s $\mathbf{\Phi}$ formula $\mathbf{X} = \operatorname{tg} \mathbf{\Phi}$. Gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $\mathbf{\Phi}$ opišemo tako: $p_{\mathbf{\Phi}}(\phi) = 1/\pi$ za $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$ in $p_{\mathbf{\Phi}}(\phi) = 0$ sicer. Za slučajno spremenljivko $\mathbf{X} = \operatorname{tg} \mathbf{\Phi}$ potem velja:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = P[\mathbf{X} < x] = P[\operatorname{tg} \mathbf{\Phi} < x] = \int_{-\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} p_{\mathbf{\Phi}}(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x\,.$$

Zato je

$$p_{\mathbf{X}}(x) = F'_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\,. \tag{1}$$

Pravimo, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$ porazdeljena po *standardiziranem Cauchyjevem zakonu* oziroma da ima $\mathbf{X}$ *standardizirano Cauchyjevo porazdelitev*. Po standardiziranem Cauchyjevem zakonu (1) je na primer porazdeljen tudi kvocient neodvisnih, standardizirano normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki imata gostoto $p(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$.

Slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$, ki je porazdeljena po sicer preprostem standardiziranem Cauchyjevem zakonu, pa ima žal od vseh začetnih momentov $\nu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{X}}(x)\, dx$ samo enega: $\nu_0 = 1$. Porazdelitev torej nima niti matematičnega upanja niti disperzije, zato se v statistiki pri ocenjevanju parametrov ne obnese. Zaradi tega vzamemo primerno funkcijo slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$. Ena takih je logaritem njene absolutne vrednosti. Videli bomo, da ima nova slučajna spremenljivka vse začetne momente in da je njena porazdelitev zelo podobna normalni.

Oglejmo si, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $\mathbf{Y} = \frac{2}{\pi} \log |\mathbf{X}|$, če je slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$ porazdeljena po standardiziranem Cauchyjevem zakonu. Faktor $2/\pi$ pred logaritmom izberemo zato, da se nova porazdelitev ujema s standardizirano normalno v matematičnem upanju in disperziji. Podobno kot v prejšnjem računu dobimo

$$F_{\mathbf{Y}}(x) = P[\mathbf{Y} < x] = P\left[\frac{2}{\pi} \log |\mathbf{X}| < x\right] = 2 \int\limits_{0}^{\exp(\pi x/2)} p_{\mathbf{X}}(\xi)\, d\xi \, .$$

Potem imamo seveda

$$p_{\mathbf{Y}}(x) = F'_{\mathbf{Y}}(x) = 2p_{\mathbf{X}}(\exp(\pi x/2)) \cdot \frac{\pi}{2} \exp(\pi x/2) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\pi x/2)} \, .$$

Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{Y}$ je dana s predpisom

$$F_{\mathbf{Y}}(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\exp(\pi x/2)} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\exp(\pi x/2)) \, .$$

Za slučajno spremenljivko $\mathbf{Y}$, ki ima gostoto

$$p_{\mathbf{Y}}(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\pi x/2)} \, , \tag{2}$$

pravimo, da je porazdeljena po *zakonu recipročnega hiperboličnega kosinusa* ali po *zakonu hiperboličnega sekansa* (angl. *hyperbolic secant distribution*).

Leonhard Euler (1707–1783) je leta 1755 v svojem delu [2] med drugim obravnaval tudi razvoj funkcije $z \mapsto 1/\cos z$, ki jo imenujemo *sekans*, v potenčno vrsto. Analogno vpeljemo funkcijo $z \mapsto 1/\operatorname{ch} z$, ki jo imenujemo *hiperbolični sekans (secans hyperbolicus)* ali *recipročni hiperbolični kosinus*. Pri tem je z lahko kompleksno število. Ker ta funkcija nastopa v porazdelitvi (2), si bomo po kratki razpravi o potenčnih vrstah in rodovnih funkcijah pobliže ogledali njen razvoj v potenčno vrsto. Hiperbolične funkcije, kakršne poznamo danes, je vpeljal Johann Heinrich Lambert (1728–1777).

1. Potenčne vrste in rodovne funkcije

Potenčna vrsta s številskimi koeficienti a_k realne ali kompleksne spremenljivke z ima obliko $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Včasih nas zanimata njen konvergenčni krog in vsota, drugič pa bolj njeni koeficienti a_k. Glede na to obravnavamo *prave* in *formalne potenčne vrste*. Koeficienti a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ so lahko zapisani na različne načine glede na konkretne potrebe. Pogosto imajo koeficienti izbrane uteži $w_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, tako da imamo opravka z vrstami $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k / w_k$. Največkrat uporabljamo $w_k = 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ in takrat govorimo o *običajnih* potenčnih vrstah. Pogosto pa je $w_k = k!$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ in tedaj vrstam $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k / k!$ pravimo *eksponentne* potenčne vrste ali vrste eksponentne oblike, ker nas spominjajo na eksponentno funkcijo in vrsto: $\exp(az) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k / k!$.

Običajne potenčne vrste seštevamo, odštevamo in množimo takole:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Koeficiente c_k produkta dobimo s *konvolucijo* koeficientov obeh faktorjev:

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{3}$$

Ko gre za prave potenčne vrste, veljajo enakosti na skupnem konvergenčnem krogu potenčnih vrst na obeh straneh enačajev.

Kadar pa imata potenčni vrsti eksponentno obliko, je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \pm b_k}{k!} z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} z^k,$$

pri čemer velja

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j b_{k-j} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{4}$$

Koeficiente c_k produkta dobimo z *binomsko konvolucijo* koeficientov a_k in b_k obeh faktorjev. Izraz za c_k v (4) izpeljemo iz navadne konvolucije (3):

$$\frac{c_k}{k!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{j!} \frac{b_{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} a_j b_{k-j} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j b_{k-j}\,.$$

Iz tega očitno sledi (4).

Na splošno je funkcija F običajna oziroma eksponentna rodovna funkcija številskega zaporedja a_0, a_1, a_2, $\ldots$, če obstaja v neki okolici točke $z = 0$ razvoj v potenčno vrsto $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ oziroma $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k / k!$.

Podobno je funkcija $\mathcal{F}$ običajna oziroma eksponentna rodovna funkcija funkcijskega zaporedja φ_0, φ_1, φ_2, $\ldots$, če obstaja v neki okolici točke $z = 0$ za vsak x z nekega intervala $\mathcal{I}$ razvoj v potenčno vrsto $\mathcal{F}(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) z^k$ oziroma $\mathcal{F}(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) z^k / k!$. Izraz *rodovna funkcija* se uporablja zato, ker taka funkcija *porodi* (generira) številsko oziroma funkcijsko zaporedje.

Rodovne funkcije ločimo glede na obliko njihovega razvoja v potenčne vrste, torej glede na dano zaporedje uteži (w_k). Z rodovnimi funkcijami oziroma s potenčnimi vrstami računamo in s tem odkrivamo razne enakosti za člene zaporedja, ki jih generirajo.

Definicija 1. Eulerjeva števila E_k so koeficienti v razvoju

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} z^k \quad (|z| < \pi/2)\,. \tag{5}$$

Funkcija $z \mapsto 1/\operatorname{ch} z$ je torej eksponentna rodovna funkcija Eulerjevih števil E_k. Najprej bomo pogledali nekatere njihove lastnosti.

Izrek 1. *Vsa Eulerjeva števila lihega indeksa so enaka* 0 *in veljata razvoja*

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, \quad \frac{1}{\cos z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \quad (|z| < \pi/2)\,. \tag{6}$$

Dokaz. Funkcija $z \mapsto 1/\operatorname{ch} z$ ima pole v točkah $z_k = (2k-1)\pi i/2$, kjer je k poljubno celo število. Teorija analitičnih funkcij (več na primer v [5]) pove, da potenčna vrsta te funkcije absolutno in enakomerno konvergira na odprtem krogu, ki ima središče v točki 0 in ki sega do najbližje singularnosti funkcije, to pa sta točki $z_0 = -\pi i/2$ in $z_1 = \pi i/2$. Zato ima potenčna vrsta funkcije konvergenčni polmer enak $\pi/2$. Ker je očitno to soda funkcija, so vsa Eulerjeva števila E_k z lihim indeksom enaka 0 in njen razvoj v potenčno vrsto je tak, kakršen je naveden v (6). Z zamenjavo $z \to iz$ takoj najdemo tudi drugi razvoj v (6). ∎

Izrek 2. *Za Eulerjeva števila velja rekurzija*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,, \quad E_0 = 1\,. \tag{7}$$

Dokaz. Označimo $s(z) = 1/\operatorname{ch} z$. Najprej lahko izrazimo $E_{2k} = s^{(2k)}(0)$ in $E_0 = s(0) = 1$, nato pa z $2n$-kratnim odvajanjem enakosti $s(z) \cdot \operatorname{ch} z = 1$ še:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \operatorname{ch}^{(2n-k)}(z) s^{(k)}(z) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Ker ima funkcija ch za odvod lihega reda funkcijo sh, ki ima pri $z = 0$ vrednost 0, za odvod sodega reda pa funkcijo ch, ki ima za $z = 0$ vrednost 1, res velja (7). ■

Tako lahko Eulerjeva števila izračunamo postopoma. Iz $\binom{2}{0}E_0 + \binom{2}{2}E_2 = 0$ dobimo $E_2 = -1$. Iz $\binom{4}{0}E_0 + \binom{4}{2}E_2 + \binom{4}{4}E_4 = 0$ pa $E_4 = 5$. Na tak način izračunamo še $E_6 = -61$, $E_8 = 1385$. Več števil $|E_n|$ in njihovih razcepov na prafaktorje je zbranih v razpredelnici 1. Opazimo, da z rastočim sodim indeksom zelo hitro naraščajo.

Opomba. Zgornja vpeljava Eulerjevih števil E_n (angl. Euler numbers) je povzeta po [3]. V nekaterih virih so $|E_n|$ Eulerjeva števila, v nekaterih pa $E_n^* = |E_{2n}|$. Prav tako je treba biti pazljiv pri *Bernoullijevih številih* B_n.

Euler pri zaporedjih še ni uporabljal indeksov, ampak si je pomagal z zaporednimi latinskimi, grškimi in gotskimi črkami. Števila E_n^* je označil po vrsti kar z α, β, ..., κ. Pri $\kappa = E_9^*$ se je zmotil, saj je v [2] objavil napačen rezultat: $\kappa = 2\,404\,879\,661\,671$.

Simbolično lahko napišemo rekurzijo (7) tudi takole:

$$(E + 1)^{2n} + (E - 1)^{2n} = 0\,, \quad E^k \equiv E_k\,, \quad E_0 = 1\,.$$

Formalna binoma potenciramo, nato pa eksponente zamenjamo z indeksi.

Števila $|E_{2n}|$ imajo svoj kombinatorični pomen. Za $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ je $|E_{2n}|$ enako številu A_{2n} alternirajočih permutacij osnovne razporedbe $(1\,2\,\ldots\,2n)$, to je permutacij, v katerih se izmenjujejo dvigi in spusti. Prvi dvig mora biti na začetku, gledano z leve strani. Dvigov je n, spustov pa $n - 1$. Za $n = 1$ je že kar osnovna razporedba (12) alternirajoča, ima pač 1

n	$\lvert E_n \rvert$	Razcep na prafaktorje
0	1	
2	1	
4	5	5
6	61	61
8	1 385	$5 \cdot 277$
10	50 521	$19 \cdot 2\,659$
12	2 702 765	$5 \cdot 13 \cdot 43 \cdot 967$
14	199 360 981	$47 \cdot 4\,241\,723$
16	19 391 512 145	$5 \cdot 17 \cdot 228\,135\,437$
18	2 404 879 675 441	$79 \cdot 349 \cdot 87\,224\,971$
20	370 371 188 237 525	$5^2 \cdot 41\,737 \cdot 354\,957\,173$

Razpredelnica 1. Nekaj začetnih Eulerjevih števil

dvig in 0 spustov, zato je $A_2 = 1$. Za $n = 2$ imamo $A_4 = 5$ alternirajočih permutacij, dobljenih iz osnovne razporedbe (1234), in sicer so to: (1324), (2314), (1423), (2413), (3412). Vse imajo po dva dviga in en spust. Res je $A_2 = |E_2| = 1$ in $A_4 = |E_4| = 5$.

V kombinatoriki se po Eulerju imenujejo tudi *eulerjevska števila* (angl. Eulerian numbers) $A_{n,k}$, ki štejejo permutacije s k dvigi osnovne razporedbe $(1\,2\,\ldots\,n)$. Tako je na primer $A_{4,2} = 11$, ker je toliko permutacij osnovne razporedbe (1234) z dvema dvigoma, in sicer so to: (1324), (2134), (2314), (3124), (1243), (1342), (2341), (1423), (2413), (3412), (4123).

2. Integrali, ki se izražajo z Eulerjevimi števili

Pokazali bomo, da se z Eulerjevimi števili da izraziti nekatere integrale. Najprej bomo izračunali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)\,dx}{\operatorname{ch} x} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{in} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)\,dx}{\operatorname{ch} x} \quad (-1 < a < 1)\,.$$

Pomembna sta za izračun začetnih momentov in karakteristične funkcije porazdelitve po zakonu recipročnega hiperboličnega kosinusa. Za izračun obeh integralov bomo uporabili iz kompleksne analize dobro znano metodo ostankov ali residuov (glej na primer [5]).

Izrek 3. *Za vsako realno število a je*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)\,dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)}\,, \tag{8}$$

za vsako realno število a $(-1 < a < 1)$ *pa*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)\,dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}\,. \tag{9}$$

Dokaz. Kompleksno funkcijo $z \mapsto f(z) = \exp(aiz)/\operatorname{ch} z$ integriramo v ravnini kompleksnih števil (z) v pozitivni smeri vzdolž ograje $\mathcal{C}_R$ pravokotnika, ki ima oglišča v točkah $-R$, R, $R+\pi i$, $-R+\pi i$, v katerem ima funkcija f enostaven pol $z_1 = \pi i/2$. Pri tem je R poljubno pozitivno realno število. Dobimo:

$$\oint_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\exp(aix)\,dx}{\operatorname{ch} x} + \int_0^{\pi} \frac{\exp(ai(R+iy))i\,dy}{\operatorname{ch}(R+iy)} +$$

$$+ \int_{R}^{-R} \frac{\exp(ai(x+\pi i))\,dx}{\operatorname{ch}(x+\pi i)} + \int_{\pi}^{0} \frac{\exp(ai(-R+iy))i\,dy}{\operatorname{ch}(-R+iy)} =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1) = 2\pi i\, \frac{\exp(ai\pi i/2)}{\operatorname{sh}(\pi i/2)} = 2\pi \exp(-a\pi/2)\,.$$

Naredimo limitni proces, ko $R \to \infty$. Prvi člen tedaj konvergira proti

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(aix)\,dx}{\operatorname{ch} x}\,,$$

tretji pa proti

$$-\exp(-a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(aix)\,dx}{\operatorname{ch}(x+\pi i)} = \exp(-a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(aix)\,dx}{\operatorname{ch} x} = \exp(-a\pi)\, I\,.$$

Drugi integral najprej ocenimo:

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{\exp(ai(R+iy))i\,dy}{\operatorname{ch}(R+iy)} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{\exp(aiR)\exp(-ay)i\,dy}{\operatorname{ch} R \cos y + i \operatorname{sh} R \sin y} \right| \le$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{\exp(-ay)\,dy}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 R\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 R\sin^2 y}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\operatorname{sh} R}\int_0^\pi \exp(-ay)\,dy\,.$$

Zadnji izraz pa konvergira proti 0, ko $R \to \infty$. Isto ugotovimo za četrti integral. Pri tem upoštevamo, da je vedno $\operatorname{ch} R \geq \operatorname{sh} R$. Tako najdemo najprej relacijo $(1+\exp(-a\pi))I = 2\pi\exp(-a\pi/2)$, nato pa še

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(aix)\,dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{2\pi\exp(-\pi a/2)}{1+\exp(-\pi a)}\,.$$

Nazadnje dobimo po preoblikovanju enakost (8).

Podobno, z integracijo vzdolž $\mathcal{C}_R$, izračunamo integral (9), le da vzamemo funkcijo $z \mapsto g(z) = \exp(az)/\operatorname{ch} z$, ki ima znotraj pravokotnika enostaven pol $z_1 = \pi i/2$ in $\operatorname{Res}(g(z), z_1) = -i\exp(a\pi i/2)$. Z limitnim procesom, ko $R \to \infty$, dobimo z upoštevanjem pogoja $-1 < a < 1$ najprej za

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ax)\,dx}{\operatorname{ch} x}$$

enačbo $J + \exp(a\pi i)J = (1+\exp(a\pi i))J = 2\pi\exp(a\pi i/2)$, nato s primerjavo realnih delov obeh strani dobljene enačbe še $(1+\cos(\pi a))J = 2\cos^2(\pi a/2)J = 2\pi\cos(\pi a/2)$ in nazadnje:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ax)\,dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}\,.$$

Če zamenjamo integracijsko spremenljivko x z $-x$, dobimo še

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ax)\,dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}$$

in z upoštevanjem enakosti $2\operatorname{ch}(ax) = \exp(ax) + \exp(-ax)$ končno (9). ■

Izrek 4. *Za vsako nenegativno celo število k velja:*

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k}\,dx}{\operatorname{ch} x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|\,. \tag{10}$$

Dokaz. Najprej uporabimo (6) in izrazimo z Eulerjevimi števili:

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{E_{2k}}{(2k)!}\,\frac{\pi^{2k+1}a^{2k}}{2^{2k}} \qquad (-1 < a < 1)\,. \tag{11}$$

Po drugi strani pa lahko z vrsto

$$\frac{\cos(ax)}{\operatorname{ch} x} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a^{2k} x^{2k}}{(2k)!\operatorname{ch} x}\,,$$

ki absolutno in enakomerno konvergira glede na spremenljivko x na vsakem omejenem intervalu, pri čemer je

$$\frac{|\cos(ax)|}{\operatorname{ch} x} \le \sum_{k=0}^\infty \frac{a^{2k} x^{2k}}{(2k)!\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x}$$

in $\int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{ch}(ax)/\operatorname{ch} x)\,dx < \infty$ zaradi (9), po medsebojni zamenjavi vrstnega reda integriranja in seštevanja zapišemo:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{\operatorname{ch} x} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a^{2k} x^{2k}}{(2k)!} = 2\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \int_0^\infty \frac{x^{2k}\,dx}{\operatorname{ch} x}\,.$$

S primerjavo koeficientov pri potenci a^{2k} v relaciji

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{\operatorname{ch} x} = 2\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \int_0^\infty \frac{x^{2k}\,dx}{\operatorname{ch} x} = \sum_{k=0}^\infty \frac{E_{2k}}{(2k)!}\,\frac{\pi^{2k+1}a^{2k}}{2^{2k}}$$

dobimo

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k}\,dx}{\operatorname{ch} x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} (-1)^k E_{2k}\,.$$

Ker je očitno integral na levi strani pozitivno število, mora veljati enakost $(-1)^k E_{2k} = |E_{2k}|$ in s tem končno (10). ∎

Zaradi rekurzije (7) so vsa Eulerjeva števila cela. Obenem pa smo pravkar v dokazu spoznali, da velja enakost $(-1)^k E_{2k} = |E_{2k}|$.

Posledica 5. *Eulerjevim številom E_{2n}, ki so vsa cela števila, se predznak izmenično menja.*

Posledica 6. *Za vsako nenegativno celo število k velja:*

$$\int_0^\infty \frac{\log^{2k} x\, dx}{1+x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|\,. \tag{12}$$

Dokaz. Če vpeljemo novo integracijsko spremenljivko $x = \log u$ v integral (10), dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k}\, dx}{\operatorname{ch} x} = 2\int_1^\infty \frac{\log^{2k} u\, du}{1+u^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|\,.$$

Ker očitno dobimo (po zamenjavi integracijske spremenljivke $u \mapsto 1/u$)

$$\int_1^\infty \frac{\log^{2k} u\, du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{\log^{2k} u\, du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\log^{2k} u\, du}{1+u^2}\,,$$

imamo nazadnje integral (12). ■

3. Polinomi, katerih koeficienti so produkti Eulerjevih števil in binomskih koeficientov

Vpeljimo zaporedje polinomov

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k x^{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{13}$$

ki imajo preprosto rodovno funkcijo, s katero si bomo pomagali poiskati nekatere njihove lastnosti.

Izrek 7. *Zaporedje polinomov $F_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ima rodovno funkcijo*

$$\mathcal{G}(x, z) = \frac{\exp(xz)}{\operatorname{ch} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x)}{n!}\, z^n \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right). \tag{14}$$

Dokaz. Z uporabo binomske konvolucije (4) lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,z) &= \exp(xz)\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\,z^k\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{E_j}{j!}\,z^j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k x^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(x)}{n!}\,z^n.\end{aligned}$$

Pri tem je x realna, z pa kompleksna spremenljivka, ki je lahko v krogu, ki ima središče v točki 0 in sega do najbližje singularnosti funkcije $z\mapsto 1/\operatorname{ch} z$, to je $\pi i/2$ oziroma $-\pi i/2$. Zato dobljena vrsta konvergira absolutno in enakomerno pri pogoju $|z|<\pi/2$ za vsak realen x. ■

Očitno je $F_0(x)=1$ in $F_n(0)=E_n$ za vsak indeks n. Stopnja polinoma $F_n(x)$ je ravno njegov indeks, zato je zaporedje $F_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ pravo polinomsko zaporedje in vsak polinom $P(x)$ z realnimi koeficienti lahko enolično izrazimo v obliki $P(x)=\sum\limits_{k\geq 0} c_k F_k(x)$ z realnimi koeficienti c_k.

Polinome $F_n(x)$ lahko zapišemo tudi simbolično:

$$F_n(x)=(E+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k x^{n-k},\quad E^k\equiv E_k\,,\quad E_0=1\,.$$

Radi pa bi imeli preprost postopek, po katerem jih izračunamo.

Izrek 8. *Za polinome $F_n(x)$ velja enakost*

$$F_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(x)y^{n-k}\quad (n=0,1,2,\ldots)\,. \tag{15}$$

Dokaz. Povečajmo v rodovni funkciji (14) spremenljivko x za y:

$$\mathcal{G}(x+y,z)=\frac{\exp((x+y)z)}{\operatorname{ch} z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(x+y)}{n!}\,z^n.$$

Po drugi strani pa dobimo s pomočjo (4) tudi razvoj:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x+y,z) &= \exp(yz)\cdot\mathcal{G}(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\,z^k\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{F_j(x)}{j!}\,z^j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(x)y^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}\,.\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pri potenci z^n v obeh zapisih najdemo (15). ■

Izrek 9. *Potenca x^n se izraža s polinomi $F_n(x)$ v obliki*

$$x^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} F_{n-2k}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{16}$$

Pri tem pomeni $\lfloor n/2 \rfloor$ največje celo število, ki ne presega $n/2$.

Dokaz. Naj bo $c_j = 1$ za vse sode indekse j in 0 sicer. Iz enakosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^n}{n!} = \exp(xz) = \operatorname{ch} z \cdot \mathcal{G}(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!}\, z^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_n(x)}{n!}\, z^n$$

dobimo po podobnem postopku kot v prejšnjem dokazu enakost

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k F_{n-k}(x)\,,$$

iz katere takoj sledi (16). ∎

Izrek 10. *Za odvod polinoma $F_n(x)$ velja enakost*

$$F_n'(x) = nF_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{17}$$

Dokaz. Z odvajanjem rodovne funkcije (14) dobimo najprej enakost

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, z) = z\mathcal{G}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(x)}{n!}\, z^n,$$

pri čemer smo upoštevali $F_0(x) = 1$, nato pa še

$$\mathcal{G}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(x)}{n!}\, z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF_{n-1}(x)}{n!}\, z^{n-1}.$$

S primerjavo koeficientov pri potenci z^{n-1} v obeh vrstah najdemo (17). ∎

Z enakostjo (17) in z upoštevanjem pogoja $F_n(0) = E_n$ lahko hitro zapišemo nekaj začetnih polinomov $F_n(x)$:

$$\begin{aligned}
F_0(x) &= 1\,,\\
F_1(x) &= x\,,\\
F_2(x) &= x^2 - 1 = (x-1)(x+1)\,,\\
F_3(x) &= x^3 - 3x = x(x^2 - 3)\,,\\
F_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 5 = (x-1)(x+1)(x^2 - 5)\,,\\
F_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 25x = x(x^2 - 5)^2.
\end{aligned}$$

Izrek 11. *Za polinome $F_n(x)$ velja naslednja enakost:*

$$F_n(x-1) + F_n(x+1) = 2x^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{18}$$

Dokaz. Oglejmo si izraz

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = \frac{\exp((x-1)z) + \exp((x+1)z)}{\operatorname{ch} z} = 2\exp(xz)\,.$$

Po eni strani je

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x-1) + F_n(x+1)}{n!}\, z^n,$$

po drugi strani pa

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, z^n.$$

S primerjavo koeficientov pri potenci z^n potrdimo veljavnost enakosti (18). ■

Izrek 12. *Polinomi $F_n(x)$ so sode funkcije, ko je indeks n sodo število, in lihe funkcije, ko je n liho število:*

$$F_n(-x) = (-1)^n F_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{19}$$

Dokaz. Iz enakosti

$$\mathcal{G}(-x, z) = \frac{\exp(-xz)}{\operatorname{ch} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(-x)}{n!}\, z^n$$

in iz enakosti

$$\mathcal{G}(-x, z) = \frac{\exp(x(-z))}{\operatorname{ch}(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_n(x)}{n!}\, z^n$$

sledi po primerjavi koeficientov pri potenci z^n takoj enakost (19). ■

Polinomi $F_n(x)$ so v tesni zvezi z *Eulerjevimi polinomi* $E_n(x)$, katerih rodovna funkcija je

$$\mathcal{H}(x, z) = \frac{2\exp(xz)}{\exp z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!}\, z^n \quad (|z| < \pi)\,.$$

Preprosta primerjava pokaže, da veljajo relacije:

$$2^n E_n(x) = F_n(2x-1)\,, \quad E_n = F_n(0) = 2^n E_n(1/2) \quad (n = 0,1,2,\ldots)\,.$$

Polinome $F_n(x)$, ki imajo celoštevilske koeficiente, smo uvedli zato, ker je z njimi nekoliko udobneje računati kot s polinomi $E_n(x)$.

4. Nekatere vsote z Eulerjevimi števili

Pokazali bomo, kdaj se vrednosti polinomov $F_n(x)$ da izraziti še kako drugače. Hitro se vidi, da gre to lepo za lihe indekse n in naravne x, za katere pa moramo posebej obravnavati sodi in lihi primer.

Izrek 13. *Za poljubni naravni števili n in k velja formula:*

$$F_{2n-1}(2k) = 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+k}(2j-1)^{2n-1}. \tag{20}$$

Dokaz. Formulo (20) pri danem n dokažemo z metodo popolne indukcije glede na število k. Za $k = 1$ stoji $F_{2n-1}(2)$ na levi strani v (20), z relacijo (18) pa imamo $F_{2n-1}(2) = 2 - F_{2n-1}(0) = 2 - E_{2n-1} = 2$, kar dobimo za $k = 1$ tudi na desni strani v (20), ki zato velja za $k = 1$. Indukcijski korak spet naredimo z relacijo (18): $F_{2n-1}(2k+2) = 2(2k+1)^{2n-1} - F_{2n-1}(2k)$. S predpostavko, da (20) že velja za neko naravno število k, imamo:

$$\begin{aligned} F_{2n-1}(2k+2) &= 2(2k+1)^{2n-1} + 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+k+1}(2j-1)^{2n-1} = \\ &= 2\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+k+1}(2j-1)^{2n-1}. \end{aligned}$$

Torej velja formula (20) tudi, če v njej zamenjamo k s $k+1$, in je zato pravilna za vsako naravno število k. ■

V posebnih primerih imamo:

$$\begin{aligned} F_{2n-1}(2) &= 2\,, \\ F_{2n-1}(4) &= 2(3^{2n-1} - 1)\,, \\ F_{2n-1}(6) &= 2(5^{2n-1} - 3^{2n-1} + 1)\,, \\ F_{2n+1}(8) &= 2(7^{2n-1} - 5^{2n-1} + 3^{2n-1} - 1)\,. \end{aligned}$$

Da bi tako izrazili tudi $(E+1)^n = F_n(1)$, $(E+3)^n = F_n(3)$, ..., si oglejmo

$$\mathcal{G}(1,z) = \frac{\exp z}{\operatorname{ch} z} = \frac{(\exp z + \exp(-z)) + (\exp z - \exp(-z))}{\exp z + \exp(-z)} = 1 + \operatorname{th} z\,.$$

Za lihe x in n v $F_n(x)$ nam bodo prišla prav *Bernoullijeva števila* B_n.

Definicija 2. Bernoullijeva števila B_k so koeficienti v razvoju

$$\frac{z}{\exp z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \quad (|z| < 2\pi)\,. \tag{21}$$

Funkcija $z \mapsto z/(\exp z - 1)$ je rodovna funkcija Bernoullijevih števil in ima v točki $z = 0$ odpravljivo singularnost, tej točki najbližji pol pa v $z = 2\pi i$ oziroma $z = -2\pi i$, zato ima konvergenčni krog potenčne vrste (21) polmer 2π. Več o Bernoullijevih številih najdemo na primer v [1, 3]. Ponovimo le najnujnejše. Vsa Bernoullijeva števila lihega indeksa od vključno tretjega naprej so enaka 0, Bernoullijevim številom sodega indeksa od 2 naprej pa se predznak izmenično spreminja: $B_{2n+1} = 0$, $|B_{2n}| = (-1)^{n-1} B_{2n}$ za $n = 1$, 2, 3, ... Vsa Bernoullijeva števila so racionalna.

Izrek 14. *Obstajata naslednja razvoja v potenčni vrsti:*

$$z \operatorname{cth} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < \pi) \tag{22}$$

in

$$\operatorname{th} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \quad (|z| < \pi/2)\,. \tag{23}$$

Dokaz. Iz (21) lahko najprej izrazimo

$$\frac{z}{\exp z - 1} + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

nato pa po preureditvi leve strani zapišemo

$$\frac{z}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < 2\pi)\,.$$

Z zamenjavo spremenljivke $z \to 2z$ takoj dobimo (22). Razvoj (23) pa je posledica elementarne enakosti $2 \operatorname{cth}(2z) = \operatorname{cth} z + \operatorname{th} z$ in (22). ∎

Iz enakosti

$$\mathcal{G}(1,z)=\frac{\exp z}{\operatorname{ch} z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(1)}{n!}\,z^n=1+\operatorname{th} z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n-1)!(2n)}z^{2n-1},$$

ki jo dobimo iz rodovne funkcije polinomov $F_n(x)$ in iz (23), sklepamo, da je

$$\begin{aligned}F_0(1)&=1\,,\\ F_{2n}(1)&=0\,,\\ F_{2n-1}(1)&=\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{2n}\quad(n=1,2,\ldots)\,.\end{aligned}\tag{24}$$

Izrek 15. *Za poljubni naravni števili n in k velja formula:*

$$F_n(2k+1)=2^{n+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+k}j^n+(-1)^kF_n(1)\,.\tag{25}$$

Dokaz. Tudi formulo (25) pri danem n dokažemo z metodo popolne indukcije glede na število k. Za $k=1$ stoji $F_n(3)$ na levi strani v (25), z relacijo (18) pa imamo $F_n(3)=2^{n+1}-F_n(1)$, kar dobimo za $k=1$ tudi na desni strani v (25), ki zato res velja za $k=1$. Indukcijski korak spet naredimo z relacijo (18): $F_n(2k+3)=2(2k+2)^n-F_n(2k+1)$. S predpostavko, da (25) že velja za neko naravno število k, imamo:

$$\begin{aligned}F_n(2k+3)&=2(2k+2)^n+2^{n+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+k+1}j^n+(-1)^{k+1}F_n(1)=\\ &=2^{n+1}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+k+1}j^n+(-1)^{k+1}F_n(1)\,.\end{aligned}$$

Torej velja formula (25) tudi, če v njej zamenjamo k s $k+1$, in je zato pravilna za vsako naravno število k. ∎

V posebnih primerih dobimo:

$$\begin{aligned}F_{2n-1}(3)&=2^{2n}-\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{2n}\,,\\ F_{2n-1}(5)&=2^{4n-1}-2^{2n}+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{2n}\,.\end{aligned}$$

5. Alternirajoče vsote naravnih potenc

Znano je, da se vsote $\sum_{j=1}^{k} j^n = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + k^n$ za vsak naraven eksponent n dajo v preprosti obliki izraziti z Bernoullijevimi polinomi (več v [1, 3]). Z našimi polinomi $F_n(x)$ pa lahko izrazimo alternirajoče vsote

$$s(k,n) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j j^n = -1^n + 2^n - 3^n + \cdots + (-1)^k k^n.$$

Iz formule (25) namreč lahko brez težav izrazimo:

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^j j^n = -1^n + 2^n - 3^n + \cdots + (-1)^k k^n = \frac{(-1)^k F_n(2k+1) - F_n(1)}{2^{n+1}}\,.$$

Pri tem sta k in n poljubni naravni števili. Za posebne primere $n = 1, 2, 3$ s pomočjo formul, ki sledijo izreku 8, dobimo:

$$\begin{aligned}
s(k,1) &= -1 + 2 - 3 + \cdots + (-1)^k k = \frac{(-1)^k(2k+1) - 1}{4}\,,\\
s(k,2) &= -1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^k k^2 = (-1)^k \frac{k(k+1)}{2}\,,\\
s(k,3) &= -1^3 + 2^3 - 3^3 + \cdots + (-1)^k k^3 = \frac{(-1)^k(2k+1)(2k^2+2k-1) + 1}{8}\,.
\end{aligned}$$

Izrek 11 pa nam omogoča sešteti alternirajoče vsote potenc lihih števil:

$$s_l(k, 2n-1) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (2j-1)^{2n-1} = \frac{1}{2}(-1)^k F_{2n-1}(2k)\,.$$

Za $n = 1, 2, 3$ dobimo na primer:

$$\begin{aligned}
s_l(k,1) &= -1 + 3 - 5 + \cdots + (-1)^k(2k-1) = (-1)^k k\,,\\
s_l(k,3) &= -1^3 + 3^3 - 5^3 + \cdots + (-1)^k(2k-1)^3 = (-1)^k k(4k^2-3)\,,\\
s_l(k,5) &= -1^5 + 3^5 - 5^5 + \cdots + (-1)^k(2k-1)^5 = (-1)^k k(4k^2-5)^2.
\end{aligned}$$

Z alternirajočimi vsotami potenc sodih števil potem ni večjih težav:

$$s_s(k, 2n-1) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (2j)^{2n-1} = 2^{2n-1} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j j^{2n-1} = 2^{2n-1} s(k, 2n-1)\,.$$

6. Še primera iz verjetnostnega računa:

A. Naj bo slučajna spremenljivka $\mathbf{Y}$ porazdeljena enakomerno na intervalu $[0,1]$, slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$ pa naj bo definirana z izrazom $\mathbf{X} = \frac{2}{\pi}\log\operatorname{tg}(\pi\mathbf{Y}/2)$. Njeno porazdelitveno funkcijo najdemo po znanem postopku:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = P[\mathbf{X} < x] = P\left[\frac{2}{\pi}\log\operatorname{tg}(\pi\mathbf{Y}/2) < x\right] = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(\exp(\pi x/2))\,.$$

To pomeni, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{X} = \frac{2}{\pi}\log\operatorname{tg}(\pi\mathbf{Y}/2)$ porazdeljena po zakonu recipročnega hiperboličnega kosinusa, če je slučajna spremenljivka $\mathbf{Y}$ porazdeljena enakomerno na intervalu $[0,1]$. S tem lahko tako porazdelitev simuliramo z računalniškim generatorjem slučajnih števil.

B. Slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$, ki je porazdeljena po zakonu recipročnega hiperboličnega kosinusa, ima začetne momente $\nu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{X}}(x)\,dx$ za $n = 0$, 1, 2, ... Najdemo jih neposredno z uporabo rezultata (10): $\nu_{2n} = |E_{2n}|$ in $\nu_{2n+1} = 0$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ Naštejmo jih nekaj: $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = 0$, $\nu_4 = 5$. Slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$ ima matematično upanje 0, disperzijo 1, standardno deviacijo 1, asimetrijo 0 in eksces 2 (za definicije glej na primer [1, 4]). Za primerjavo: standardizirana normalna porazdelitev premore prav take številske karakteristike razen ekscesa, ki je 0. Zato včasih v statistiki normalno porazdelitev nadomestijo z našo porazdelitvijo recipročnega hiperboličnega kosinusa.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz in I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, New York, 1972.

[2] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis*, Academia Imperialis Scientiarum Petropolitana, Sankt Peterburg, 1755.

[3] I. S. Gradsteyn in I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums and products*, edited by A. Jeffrey, Academic Press, New York, 1994.

[4] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Matematika – fizika 3, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.

[5] I. Vidav, *Višja matematika III*, Matematika – fizika 8, DZS, Ljubljana, 1976.

STEFANOVO ŠTEVILO

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 44.05.+e, 44.35.+c

Ob stopetinsedemdesetletnici Stefanovega rojstva seznam fizikalnih pojmov s Stefanovim imenom dopolnimo s Stefanovim številom. Stefanovo število so vpeljali z različnimi dogovori.

THE STEFAN NUMBER

At the 175th anniversary of Stefan's birth the list of concepts of physics containing Stefan's name is supplemented with the Stefan number. The Stefan number was even introduced by different conventions.

Ime Jožefa Stefana, najbolj znanega slovenskega fizika 19. stoletja, danes večkrat srečamo v fizikalni literaturi. Po njem imenujejo zakon, količine in pojave: *Stefanov* ali *Stefan-Boltzmannov zakon*, *Stefanova konstanta*, *Stefanova sila*, *Stefanov tok*, *Stefanova naloga*. Tem stalnim zvezam, o katerih je Obzornik že poročal, lahko dodamo še *Stefanovo število*.

Najprej so Stefanovo število[1] vpeljali kot razmerje med gostoto izsevanega energijskega toka in gostoto toplotnega toka pri prevajanju: $Ste = \sigma l T^3/\lambda$ [1]. V števec postavimo gostoto izsevanega energijskega toka po Stefanovem zakonu $j = \sigma T^4$, v imenovalec pa gostoto toplotnega toka v plasti $j = \lambda \Delta T/l$. Pri tem je σ Stefanova konstanta, T temperatura segretega telesa, l debelina plasti in λ njena toplotna prevodnost. Na drugi meji plasti vzamemo temperaturo enako 0, tako da je $\Delta T = T$. V tem primeru pri velikem Stefanovem številu prevlada izmenjavanje toplote s sevanjem, pri majhnem pa izmenjavanje toplote s prevajanjem. Vendar se ime za to razmerje ni prijelo.

Stefana je zanimalo, kako se v mrazu debeli plast ledu na morju in je izide svojega računa primerjal s podatki odprav v polarne predele [2]. Pri tem je rešil *nalogo s premično mejo* [3]. Na tej podlagi je G. S. H. Lock vpeljal Stefanovo število drugače: kot razmerje med toploto, ki jo odda led, ko se

[1]Za ta *števila* je značilno, da imajo enoto 1. Takih števil poznamo precej, na primer Reynoldsovo število $Re = l\rho v/\eta$, Prandtlovo število $Pr = \rho c_p/\lambda$. Z njimi si pogosto pomagamo, ker sta pojava v dveh merilih podobna, če sta ustrezni števili enaki.

ohladi za temperaturno razliko ΔT, in toploto, ki se sprosti, ko voda zmrzne: $Ste = c_p \Delta T / q_t$ [4, 5]. Pri tem je c_p specifična toplota ledu pri konstantnem tlaku, q_t talilna toplota in ΔT temperaturna razlika med mejo ledu in vode ter mejo ledu in zraka. Stefanovo število je uporabil le za sistem ledu in vode. Danes pa ga uporabljajo na splošno pri pojavih, pri katerih se talina strjuje ali trdnina tali. Pri velikem Stefanovem številu prevlada toplota, povezana z ohlajanjem, pri majhnem pa latentna toplota. Na Stefanovo število naletijo na primer, ko raziskujejo stacionarno in oscilatorno konvekcijo v vrteči se mešanici trdnine in kapljevine ali nastanek dendritov pri ohlajanju taline, in v številnih drugih zapletenih primerih. O tem se bralci lahko prepričajo na spletu. Včasih, a redkeje, vpeljejo Stefanovo število kot obratno vrednost omenjenega. V tej zvezi, a nekoliko manj pogosto, omenjajo tudi *Stefanov pogoj.* Ta velja v najsplošnejšem primeru, ko pri prehodu toplote na meji kapljevine in trdnine upoštevamo, da se razlikujeta njuni gostoti – in druge snovne lastnosti.

O Stefanovi vlogi v raziskovanju prenosa toplote je J. Crepeau zapisal: *„Ta skromni, delavni raziskovalec je trajno vplival na področje prenosa toplote. Pozornost zbuja, da je posameznik, o katerem tako malo vemo, tako pomembno prispeval k znanju o prenosu toplote s prevajanjem, konvekcijo in sevanjem.“* [6]

LITERATURA

[1] J. P. Catchpole in G. Fulford, *Dimensionless groups*, Industrial and Engineering Chemistry **58** (1966) 46.

[2] J. Stefan, *Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften 2 **98** (1889) 965; Annalen der Physik und Chemie **42** (1891) 269.

[3] J. Strnad, *Stefanova naloga*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987), 207.

[4] G. S. H. Lock, *On the use of asymptotic solutions to plane ice-water problems*, Journal of Glaciology **8** (1969) 285.

[5] B. Šarler, *Stefan's work on solid-liquid phase changes*, Engineering Analysis with Boundary Elements **16** (1995), 83–92.

[6] J. Crepeau, *Josef Stefan: His life and legacy in the thermal sciences*, Experimental Thermal and Fluid Science **31** (2007), 795–803.

STROKOVNO SREČANJE IN OBČNI ZBOR DMFA
Portorož, 5. in 6. 11. 2010

Po večletnih željah in prizadevanjih nam je na Obali uspelo najti primeren prostor za organizacijo strokovnega srečanja in občnega zbora. Tako smo se tokrat zbrali v hotelu Slovenija v Portorožu, kjer smo imeli na voljo dovolj velikih dvoran.

Strokovni del za učitelje je potekal v treh sekcijah: matematika v osnovni šoli, matematika v srednji šoli in fizika. Vodilna tema letošnjega srečanja je bila *matematika in fizika v tehniki*.

Vzporedno je potekalo *7. srečanje fizikov v osnovnih raziskavah* (o njem bomo poročali posebej).

Prek informacijskega strežnika DMFA se je na strokovno srečanje prijavilo 184 učiteljev iz osnovnih in srednjih šol, vseh pa nas je bilo okoli 400.

Povzetke in razporede predavanj smo že sredi oktobra objavili na domači strani društva. Prav tako je bil pred srečanjem objavljen tudi program srečanja.

Za udeležence strokovnega srečanja smo pripravili bilten s poročili o delu društva in povzetki predavanj ter društveni koledar za leto 2011.

Predavatelji in predavanja so se zvrstili po naslednjem razporedu:

Petek, 5. novembra 2010

Fizika:

- Tine Golež: *(Končno?) Za dijake razumljiva pot k entropiji*
- Janez Strnad: *Od telegrafa do spleta*
- Robert Repnik: *Georadar*
- Dejan Škrabelj: *Laserji v sodobnem svetu*
- Iztok Urbančič: *Infrardeče tehnologije*
- Aleš Fajmut: *Fizika v medicini*
- Ana Dergan: *Svetlobno in zvočno ogrinjalo*
- Nataša Vaupotič: *Merjenje visokofrekvenčnega elektromagnetnega onesnaženja*
- Jurij Sodja: *O aerodinamiki*
- Boris Kham: *Zvezdnato nebo na radijskih valovih in skozi razstave*
- Dalibor Šolar: *Opazovanje in fotografiranje Sonca*
- Dalibor Šolar, Jaka Banko: *Milni mehurčki kot didaktično orodje za poučevanje fizike*
- Verižniki: *Predstavitev verižnih eksperimentov*

Matematika v osnovni šoli:

- Nada Razpet: *Modeli 1*
- Milena Strnad: *Osnovnošolska matematika: stezica ali pot v tehniko*
- Saša Kopač Jazbec: *Kako učencem približati matematiko s pomočjo tehnike v okviru tehniških dni*
- Dušanka Colnar: *Sodelovanje matematike in tehnike pri pouku*
- Jerneja Bone: *Zastopanost tehničnih vsebin v besedilnih nalogah*
- Jerneja Bone, Nada Nikolič: *Povezovanje tehniških in matematičnih znanj v eksternih preverjanjih*
- Nada Razpet: *Modeli 2*
- Matija Lokar: *Kakšna učna gradiva potrebuje učitelj*
- Gabrijela Hladnik: *Izdelava lastnih logičnih ugank s pomočjo portala NAUK*
- Marko Razpet: *Nekoliko drugačna uporaba geoplošče*
- Zlatan Magajna: *Moč in nemoč matematičnega modeliranja*
- Evgenija Godnič: *Matematično kolo*
- Suzana Harej: *Sodelovalno učenje pri matematiki v spletnem učnem okolju*
- Tekmovanja: *Razvedrilna matematika*

Matematika v srednji šoli:

- Marko Razpet: *Verižnica – nekoliko drugače*
- Marko Slapar: *Štetje praštevil in Riemannova hipoteza*
- Martin Milanič: *Matematika v biologiji: iskanje filogenetskih dreves*
- Nežka Mramor Kosta: *Kako iz množice točk sestaviti obliko?*
- Emil Žagar: *Bézierove krivulje*
- Petra Grošelj: *Analitični hierarhični proces – matematična metoda za reševanje večkriterijskih problemov*
- Gašper Žerovnik: *Trajno odlaganje izrabljenega jedrskega goriva*
- Rija Erveš: *Okvarni premeri telekomunikacijskih omrežij*
- Jernej Tonejc: *Zasebno življenje javnih ključev*
- Primož Lukšič: *Kako sam pripravim interaktivna gradiva iz matematike*
- Katja Markovič: *Izdelava animiranih navodil za reševanje matematičnih nalog*
- Matija Lokar: *Računalniška orodja v matematiki*
- Aleš Matijevič: *Tablični računalnik – nova oblika matematičnega učbenika?*
- Tekmovanja: *Novosti v pravilniku o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja*

Zvečer smo si ogledali epizodo iz serije filmov o zgodovini matematike.

Sobota, 6. novembra 2010

Začeli smo z vabljenim predavanjem. Prof. dr. Igor Muševič, ki je prejel Zoisovo nagrado za vrhunske znanstvene in razvojne dosežke na področju fizike, je imel predavanje z naslovom *Nematski koloidi*. Predstavil je delo slovenskih raziskovalcev na tem področju in tudi, kaj vse naj bi na tem področju delali v prihodnje.

Po odmoru smo nadaljevali z občnim zborom.

Popoldanski program je potekal v treh sekcijah.

Matematika:

- Tine Golež: *Kaj naj učitelj matematike zahteva od kolega fizika*
- Mateja Sirnik, Silva Kmetič: *Matematično modeliranje*
- Amela Sambolić Beganović: *Praznovanje dneva števila π – ideja za medpredmetno povezovanje*
- Mojca Suban Ambrož: *Kakšno matematiko potrebuje tehnik?*

Fizika:

- Karel Šmigoc: *Utrinki iz zgodovine o pouku fizike pred pol stoletja*
- Margareta Obrovnik Hlačar: *Pouk fizike – aktiven, inovativen, ustvarjalen, zanimiv in zabaven?*
- Mateja Pogorelc: *Možnosti uporabe e-učilnice pri fiziki*
- Stanislav Južnič: *Zgodovina raziskovanja vakuuma in vakuumskih tehnik*

Astronomija:

Do 17. ure je potekala delavnica *Tekmovanja iz znanja astronomije: priprava tekmovalcev, organizacija in izvedba tekmovanj*, ki sta jo vodila Andrej Guštin in Anja Lautar.

Spremljevalne dejavnosti

Adela Žigert je pripravila plakat z naslovom: *Model za prikaz valovanj.*
Boris Kham je poskrbel za postavitev odmevne razstave *Kopernik na Slovenskem.*
Marko in Nada Razpet sta pripravila plakata o Alojziju Vadnalu in Ivanu Štalcu ob 100-letnici rojstva ter plakat o Blažu Matku.
Verižniki so pripravili plakat o dejavnostih v zvezi z verižnim eksperimentom.
Mihaela Voskobojnik je poskrbela za promocijo Plemljeve hiše.
Na voljo sta bili tudi dve zloženki: *O verižnem eksperimentu* in vabilo na seminar *Fizika v glasbi.*

Pogovarjali smo se tudi o temi naslednjega občnega zbora. Za osnovno šolo je predlagana tema *Geogebra v matematiki in fiziki.* K izboru predavanj za srednjo šolo je bilo letos nekaj pripomb. Profesorji si želijo bolj uporabnih stvari, zato se o temi še nismo dogovorili. Predloge sprejemamo do februarja leta 2011. Skušali jih bomo uresničiti.

62. OBČNI ZBOR DMFA

Ker je bilo ob 10. uri prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, se je občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA Slovenije pričel ob 10.30.

V delovno predsedstvo so bili izvoljeni: predsednik Mitja Rosina, člana Nataša Vaupotič in Boris Kham, zapisnikar Janez Krušič, za overovatelja zapisnika Peter Legiša in Milan Hladnik.

Z minuto molka smo se poklonili spominu na člana Milana Kaca, zaslužnega profesorja Univerze v Mariboru, ki je preminil v preteklem letu.

Za častnega člana DMFA Slovenije je bil imenovan doc. dr. Zlatko Bradač.

Društvena priznanja so prejeli:

- Mira Babič, prof., *učiteljica matematike, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer*
- mag. Mirjam Bon Klanjšek, prof., *učiteljica matematike, Gimnazija Nova Gorica*
- Sonja France, prof., *učiteljica matematike, Gimnazija Velenje*
- Florjana Žigon, prof., *učiteljica matematike in fizike, Gimnazija Bežigrad v Ljubljani*
- OŠ Dušana Bordona Koper

Poročila o delu društva so bila objavljena v biltenu 62. občnega zbora. Gregor Dolinar je poročal še o gospodarjenju s Plemljevo hišo na Bledu.

Mitja Rosina je povabil člane DMFA, da kar se da izkoristijo možnosti bivanja in organiziranja manjših delovnih srečanj v Plemljevi hiši.

Mitja Rosina je opozoril, da v poročilu DMFA – založništvo ni bila omenjena periodična publikacija Blejske delavnice, kjer so objavljeni najpomembnejši prispevki julijskih srečanj fizikov na Bledu.

Občnemu zboru je posredoval tudi prošnjo predsednika Evropskega matematičnega društva Arija Lapteva, da evropska združenja protestirajo pri avstrijskem ministrstvu za znanost in raziskave zaradi ukinjanja financiranja nekaterih raziskovalnih inštitutov zunaj univerz. Pri tem je bil posebej omenjen Inštitut Erwina Schrödingerja na Dunaju.

Sprejet je bil sklep, da Tomaž Pisanski in Mitja Rosina, predsednika slovenskih odborov za matematiko ter fiziko, pripravita in odpošljeta ustrezno peticijo.

Dana je bila pobuda, da bi bilo na strokovnih srečanjih obravnavanih več neposredno uporabnih vsebin za srednješolske učitelje. Občni zbor se s pobudo strinja in prosi za pravočasne (do konca januarja tekočega leta) predloge za tematiko, ki naj bo obravnavana.

O predlogu, da bi prvo stran društvenega koledarja za leto 2011 izdali kot večji plakat, bo razmislila komisija za popularizacijo znanosti, ki jo vodi Jurij Bajc.

Občni zbor se je strinjal s pobudo, da bi društvena priznanja dobivali praviloma posamezniki, organizacije pa le izjemoma za resnično pomembne dosežke na pedagoškem in strokovnem področju.

Potrjen je predlog upravnega odbora, da prijavnina na prvi stopnji tekmovanj iz matematike, fizike ter astronomije ostaja 1,20 EUR na udeleženca.

O delu in ugotovitvah nadzornega odbora je poročal Mitja Rosina:

- pravilnost finančnega poslovanja za leto 2009 je nadzorni odbor ugotovil na seji 25. 3. 2010,
- z delom upravnega odbora je nadzorni odbor vseskozi seznanjen bodisi s prisotnostjo na sejah bodisi z zapisniki sej upravnega odbora,
- v delu upravnega odbora do občnega zbora nadzorni odbor ni ugotovil nepravilnosti.

Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2009 je podrobno pojasnil Janez Krušič. Poročilo je bilo soglasno potrjeno brez razprave.

Predlog sprememb in dopolnitev Pravil DMFA Slovenije je pripravila statutarna komisija v sestavi Gregor Dolinar, Darjo Felda, Janez Krušič in Matjaž Željko. Objavljen je bil na internetni domači strani DMFA Slovenije.

O predlaganih spremembah je poročal Janez Krušič.

Občni zbor je potrdil dopolnitve in sprejel Pravila Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v taki obliki, kot so bili predlagani. Hkrati je pooblastil upravni odbor v novi sestavi, da Pravila uskladi z morebitnimi zahtevami ustrezne službe pri Upravni enoti Ljubljana, ki bo ugotavljala njihovo skladnost z Zakonom o društvih. Vsi trije sklepi so bili sprejeti soglasno.

Na predlog delovnega predsednika je občni zbor razrešil dosedanji upravni odbor, nadzorni odbor in častno razsodišče.

Mitja Rosina se je članom razrešenih organov zahvalil za uspešno delo, občnemu zboru pa je predlagal kandidatno listo za voljene organe DMFA Slovenije za obdobje 2011–2012.

Upravni odbor:

- Sandi Klavžar, *predsednik DMFA Slovenije*
- Nada Razpet, *podpredsednica DMFA Slovenije*
- Janez Krušič, *tajnik DMFA Slovenije*

Tajniki stalnih komisij:

- Klavdija Mlinšek, *popularizacija matematike v osnovni šoli*
- Lucijana Kračun Berc, *popularizacija matematike v srednji šoli*
- Barbara Rovšek, *popularizacija fizike v osnovni šoli*
- Ciril Dominko, *popularizacija fizike v srednji šoli*
- Andrej Guštin, *popularizacija astronomije*
- Gregor Dolinar, *Mednarodni matematični kenguru*
- Boštjan Kuzman, *pedagoška dejavnost*
- Matjaž Željko, *informacijska tehnologija*

Predsedniki stalnih strokovnih odborov:

- Tomaž Pisanski, *Slovenski odbor za matematiko*
- Mitja Rosina, *Slovenski odbor za fiziko*
- Andreja Gomboc, *Slovenski odbor za astronomijo*

Nadzorni odbor:

- Olga Arnuš
- Milan Hladnik
- Janez Seliger

Častno razsodišče:

- Marija Vencelj
- Anton Suhadolc
- Zvonko Trontelj

Vsi predlagani kandidati so bili soglasno izvoljeni.

Za izkazano zaupanje se je zahvalil izvoljeni predsednik Sandi Klavžar. Med zadanimi nalogami, ki jih bo poskušal uresničiti v dvoletnem mandatu, je posebej poudaril dve:

- društveno glasilo Obzornik za matematiko in fiziko napraviti privlačnejše za člane in
- z delom DMFA v večji meri seznaniti mlade in pridobiti čim več članov že med študenti.

Nada Razpet se je zahvalila Darju Feldi za dolgoletno delo v upravnem odboru, še posebej za vodenje komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli.

Delovni predsednik je seznanil občni zbor s predlogom za sestav drugih društvenih organov, ki jih imenuje upravni odbor.

Komisija za častne člane

- Sandi Klavžar, *predsednik*
- Zvonko Trontelj
- Peter Vencelj

Komisija za društvena priznanja

- Sandi Klavžar, *predsednik*
- Boštjan Kuzman
- Tomaž Pisanski

In še:

- Tomaž Pisanski, *zastopnik v odboru za spominska obeležja Jurija Vege*
- Mihaela Voskobojnik, *zastopnica za gospodarjenje s Plemljevo hišo*
- Andreja Jaklič, *računovodkinja in knjigovodkinja*

Projekt *E-storitve in gradiva za matematiko* je predstavil Matjaž Željko. O projektu *Vsepovsod ta MaFijA* (iz sklopa *Promocija znanosti in inovativnosti*) je poročal Jurij Bajc. Oba projekta prek javnih razpisov sofinancira *Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo.*

Strokovno srečanje in 63. občni zbor DMFA Slovenije bosta v prvi polovici novembra 2011, ponovno v Hotelu Slovenija v Portorožu.

Vodilna tema strokovnega srečanja za matematiko v osnovni šoli in fiziko bo *uporaba programa Geogebra v matematiki in fiziki.*

Pripravila Nada Razpet in Janez Krušič

ČASTNI ČLAN DMFA SLOVENIJE

Dr. Zlatko Bradač

Doc. dr. Zlatko Bradač je diplomiral leta 1973, magistriral leta 1983 in doktoriral na Oddelku za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani. Leta 1972 se je zaposlil kot učitelj fizike na Gimnaziji Miloša Zidanška v Mariboru, od leta 1980 pa je bil zaposlen na Pedagoški fakulteti v Mariboru oziroma po razdružitvi fakultete na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. Že kot srednješolski profesor fizike se je izkazal z izjemnim posluhom za strokovno preudarjen in zanimiv pouk fizike: bil je zelo priljubljen profesor te šole. Glas izjemnega profesorja je vzpodbudil takratno vodstvo Oddelka za fiziko Pedagoške fakultete v Mariboru, da ga je povabilo v vrste svojih profesorjev. Veseli smo, da se je za to odločil, saj je v naslednjih letih s svojim izjemnim čutom za fiziko in čutom za delo s študenti, bodočimi učitelji fizike, veliko pripomogel k popularizaciji fizike in učiteljskega poklica na tem področju.

Iz bibliografije je razvidna izjemno bogata znanstvena in strokovna dejavnost kandidata. Pomemben del strokovnih objav ima dr. Bradač tudi s področja področnih in državnih tekmovanj iz fizike za osnovnošolce, ki jih je skupaj z organizacijskim odborom utemeljil in na državnem ter regijskem nivoju zadnjih 20 let z veliko ljubeznijo in predanostjo aktivno izvajal. Je tudi pomemben soavtor Pravilnika o tekmovanju za zlato Stefanovo priznanje. Prepričani smo, da je ta njegova aktivnost izjemno prispevala k popularizaciji fizike, pa tudi k odločanju mladih za študij fizike tako na strokovni kot na pedagoški smeri. To potrjuje tudi priznanje, ki mu ga je leta 1980 podelilo DMFA Slovenije.

Sodeloval je tudi v številnih projektih, ki so neposredno prispevali k razvoju naravoslovja v Sloveniji, še posebej v severovzhodnem delu, ki do nastanka Fakultete za naravoslovje in matematiko UM ni imel tako eminentne podpore, kot jo ima osrednja Slovenija. Tukaj kaže še posebej poudariti Tempusov projekt EDEN, v katerem je dr. Bradač sodeloval kot vodja in organizator mednarodno odmevne konference o srednješolskem pouku fizike. Od ustanovitve revije „Fizika v šoli“ je tudi član njenega uredniškega sveta, zadnje leto pa član uredniškega odbora. V tej reviji je odgovoren za recenzijo člankov z eksperimentalno vsebino.

Za popularizacijo fizike je pomembna tudi njegova izjemna pedagoška dejavnost. Ob predavanjih fizike na matičnem oddelku je vrsto let predaval in vodil vaje tudi na dveh visokošolskih strokovnih programih: Vzgojitelj predšolskih otrok (predmet Začetno naravoslovje – fizika na Pedagoški fakulteti UM) in Kmetijska tehnika (predmet Izbrana poglavja iz fizike na Fakulteti za kmetijstvo UM). Za vse predmete je pripravil bogato študijsko gradivo in izjemen nabor motivacijskih, raziskovalnih in ilustrativnih eksperimentov. Študentske ankete kažejo, da na Oddelku za fiziko izstopa kot najbolj priljubljen učitelj fizike. Izjemno ga spoštujejo in cenijo tudi sodelavci na oddelku, na pobudo katerih je dobil srebrno plaketo Univerze v Mariboru. Dr. Bradač je bil tudi predstojnik oddelka, in sicer več mandatov. Pod njegovim vodstvom je oddelek izvedel vrsto popularizacijskih aktivnosti za osnovnošolsko in srednješolsko mladino (fizikalni tabori, tekmovanja, dnevi odprtih vrat oddelka za fiziko in številne druge aktivnosti) ter strokovnih in pedagoško pomembnih seminarjev za učitelje in širšo javnost. Njegov pomembni prispevek je tudi napredovanje oddelka na področju eksperimentalne fizike in povezovanja s sodobno informacijsko tehnologijo. V pouk fizike na oddelku je vpeljal številne posodobitve.

Tudi znanstvenoraziskovalnemu delu je dr. Bradač izjemno predan. Ob izjemnih prispevkih na področju didaktike fizike aktivno dela tudi na področju fizike kompleksnih sistemov, kjer raziskuje obnašanje nematičnih tekočih kristalov z metodo molekularne dinamike. To področje je kljub aktualnosti (zanimivo je tako za razumevanje temeljnih zakonitosti kot tudi za raznovrstne aplikacije) relativno neraziskano.

Glede na zapisano smo prepričani, da je dr. Zlatko Bradač s svojo izjemno strokovno, znanstveno in pedagoško dejavnostjo bistveno pripomogel k razvoju in popularizaciji fizike v Slovenije in zato Upravnemu odboru DMFA predlagamo, **da ga ob njegovi upokojitvi sprejme za častnega člana DMFA Slovenije**.

DRUŠTVENA PRIZNANJA ZA LETO 2010

OŠ Dušana Bordona Koper

Na OŠ Dušana Bordona Koper vodstvo šole ter učitelji matematike in fizike vlagajo veliko truda v dodatno delo z učenci, ki kažejo več zanimanja za matematiko in fiziko. Rezultati takšnega dela se kažejo v množičnosti tekmovalcev na prvih stopnjah tekmovanj in rezultatih učencev na državnih tekmovanjih, ki jih vsako leto najdemo med dobitniki priznanj. Tudi pri organizaciji tekmovanj so v svoji regiji vedno priskočili na pomoč. Na šoli skrbijo za izvajanje dodatnih ur matematike in fizike ter se vključujejo v projekte izobraževanja in dela z nadarjenimi učenci v OŠ.

V delu z mladimi matematiki in fiziki so tako jasno razvidne pedagoške, društvene, publicistične in raziskovalne dejavnosti šole, ki pozitivno vplivajo na razvoj in ugled matematike, fizike in astronomije v Slovenski Istri.

Mira Babič, prof.

Mira Babič je profesorica matematike. Na Gimnaziji Franca Miklošiča Ljutomer dela že od leta 1979 kot učiteljica matematike.

V pouk matematike vključuje različne postopke in prilagoditve za različno motivirane dijake. Načrtno posveča mnogo časa in truda popularizaciji matematike med mladimi. Mnoge med dijaki pritegne k poglabljanju znanja matematike in jih pripravlja na državna tekmovanja, kjer dosegajo vidne uspehe.

Mira Babič je bila pobudnica in organizatorica posebnega mednarodnega tekmovanja, v katerem že vrsto let sodelujejo dijaki iz njihove gimnazije in sosednjih gimnazij iz Avstrije, Madžarske in Hrvaške. Sodelovala je z ZRSŠ pri projektu Nivojski pouk matematike v 4. letniku gimnazije in že več let sodeluje z Državnim izpitnim centrom kot zunanja ocenjevalka za matematiko na maturi. Bila je tudi recenzentka učbeniške serije za matematiko za odrasle.

Mag. Mirjam Bon Klanjšček, prof.

Mag. Mirjam Bon Klanjšček je profesorica matematike, ki je v šolstvu zaposlena že od leta 1978. Danes dela kot učiteljica matematike na Gimnaziji v Novi Gorici.

Poleg vestnega poučevanja matematike že vrsto let uspešno pripravlja dijake za vse ravni matematičnih tekmovanj. Sodelovala je tudi v tekmovalnih komisijah na državnih tekmovanjih srednješolcev iz matematike.

Vodila je študijsko skupino za matematiko za srednje šole severnoprimorske regije, v sodelovanju z ZRSŠ je izvajala izobraževanje učiteljev, sodelovala pri pripravi nalog za zaključne izpite iz matematike za srednje šole in pri raznih drugih projektih. Pri Državnem izpitnem centru je zunanja ocenjevalka za matematiko na maturi, bila je članica predmetne razvojne skupine za matematiko v gimnazijah in predmetne komisije za spremljanje in posodabljanje učnih načrtov. Napisala je priročnik z odgovori na ustna vprašanja iz maturitetnega kataloga in je soavtorica učbenikov in zbirk vaj za matematiko, ki se pripravljajo po novem učnem načrtu za gimnazije.

Sonja France, prof.

Sonja France je profesorica matematike in od leta 1991 uči matematiko na Šolskem centru Velenje.

Poleg dela v razredu, ki ga opravlja korektno in uspešno, je že vrsto let mentorica dijakom na vseh treh ravneh matematičnih tekmovanj. Dijaki so pod njenim mentorstvom posegli po številnih zlatih priznanjih na državnih tekmovanjih, osvojili dve srebrni medalji na sredozemskih tekmovanjih in bronasto medaljo na matematični olimpijadi. Leta 2005 je tudi organizirala državno tekmovanje iz matematike za srednješolce.

Na svoji šoli že nekaj let vodi aktiv matematikov, sodeluje v številnih projektih ZRSŠ in MŠŠ ter svoje bogato znanje in izkušnje nesebično prenaša na sodelavce in študente.

Florjana Žigon, prof.

Florjana Žigon je profesorica matematike in fizike. V šolstvu je zaposlena že od leta 1973, danes uči fiziko na Gimnaziji Bežigrad v Ljubljani.

Najpomembnejše zanjo je kvalitetno delo v razredu, veliko časa in energije pa posveča nadarjenim dijakom. Vsako leto pripravlja za tekmovanja iz fizike več skupin dijakov, ki na državnih tekmovanjih mnogokrat posegajo po zlatih priznanjih. Pod njenim mentorstvom so dijaki v zadnjih desetih letih z mednarodnih fizikalnih olimpijad prinesli domov tri srebrne, tri bronaste medalje in pet pohval.

Florjana Žigon je soavtorica knjige Vprašanja, naloge, odgovori, ki je bila napisana za pomoč dijakom in učiteljem pri pripravi na maturo, in recenzentka nekaj srednješolskih učbenikov za fiziko. Na svoji šoli že več let vodi aktiv fizikov in vnaša fiziko v različne projekte na šoli.

Na podlagi predlogov pripravila Lucijana Kračun Berc

Jin Akiyama in Mari-Jo Ruiz, Dogodivščine v deželi matematičnih čudes, World Scientific Publishing, London, 2008, 233 strani.

Jin Akiyama je profesor matematike in direktor Raziskovalnega inštituta za razvoj izobraževanja Univerze Tokai v Tokiu. Ukvarja se z diskretno geometrijo, teorijo grafov in didaktiko matematike. Na Japonskem je znan po zelo uspešnih televizijskih oddajah, s katerimi že od leta 1991 približuje matematiko širšemu krogu ljudi. Na podlagi izkušenj s televizijskimi oddajami se je porodila zamisel o muzeju oz. hiši, kjer bi (predvsem mladi) obiskovalci ob praktičnih izkušnjah z razstavljenimi modeli odkrivali in doživeli čudesa matematike. Tako je leta 2003 v Hokaidu na Japonskem osnoval Deželo matematičnih čudes, nekakšen muzej interaktivnih matematičnih modelov. Skupaj z Mari-Jo Ruiz, profesorico matematike, upraviteljico Univerze Ateneo de Manila na Filipinih in prejemnico številnih državnih nagrad za izjemno poučevanje, sta napisala zanimivo knjigo, ki nas v družbi treh mladih izmišljenih junakov popelje na potep po Deželi matematičnih čudes.

Knjiga Dogodivščine v Deželi matematičnih čudes opisuje izkustva treh prijateljev, učencev višjih razredov osnovne šole, ob njihovem obisku Dežele matematičnih čudes. Dan, ki ga preživijo v tej hiši matematičnih čudes, je poln zanimivih odkritij in izzivov. Med drugim se fantje namesto navadnega sprehoda po Deželi matematičnih čudes prevažajo s prav posebnimi kotalkami. Čeprav kolesa kotalk niso okrogla, temveč imajo obliko napihnjenih trikotnikov, omogočajo gladko vožnjo. Fantje se nato poučijo o krivuljah s konstantno širino ter spoznajo še nekatere druge primere in protiprimere. Spoznajo stroj, ki izdeluje kvadratne luknje, ter se preizkusijo v tekmovanju spuščanja po toboganih, ki imajo oblike različnih krivulj. Z vrečkami, napolnjenimi s peskom, ki si jih stlačijo v žepe, izenačijo svoje mase ter se istočasno spustijo po teh različnih toboganih. Eden izmed toboganov vedno omogoča najhitrejši spust in fantje nato spoznajo krivulje, imenovane cikloide, ter brahistohronsko lastnost. Nadvse zanimivi sta tudi Pitagorova soba, polna pravokotnih trikotnikov, ter glasbena soba, kjer lahko tekajo po glasbenih stopnicah in sami odkrivajo povezanost glasbe in matematike. Tam so še posebna igralna naprava, imenovana matematični pachinko, tricikel s kvadratnimi kolesi, naprava, ki samodejno izračuna največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh števil, ter še veliko drugih zanimivih interaktivnih modelov, ki jih fantje preizkusijo. Ob tem neizmerno uživajo, obenem pa vsaka taka izkušnja z modeli zbudi v njih radovednost ter jih spodbudi k lastnemu nadaljnjemu raziskovanju in matematičnemu odkrivanju. Na potepanju po Deželi matematičnih čudes spoznajo nekaj prijaznih vodnikov, ki jim v izziv ponudijo tudi različne aktivnosti, kot so: posebno zvijanje, zgibanje ter rezanje papirja. Prav osupljiv je rezultat, ki ga dobimo, če dva Möbiusova trakova zalepimo pravokotno drug na drugega, pri čemer je en Möbiusov trak zvit v eno smer, drugi pa v drugo, ter ju razrežemo po črti, ki poteka vzdolž vsakega traku ter deli širino traku na dva dela. Dobimo namreč dve prepletajoči se srci. Fantje spoznajo tudi enostaven način, kako iz razrezanih tetraedrov izdelamo sestavljanke, podobne tistim, ki jih je ustvarjal slavni nizozemski umetnik Escher in s katerimi lahko tlakujemo ravnino. Vključeno je tudi poglavje o stožnicah z navezavo na njihovo uporabnost v vsakdanjem življenju ter spoznavanje t. i. obrnljivih teles in teles, s katerimi lahko zapolnimo tridimenzionalni prostor. Ko ob koncu dneva, preživetega v Deželi matematičnih čudes, fantje odhajajo od tam, so bogatejši za veliko novih spoznanj, obenem pa polni resničnega spoštovanja do matematike. Izkusili in spoznali so namreč njeno lepoto, uporabnost in neizbežnost.

Knjiga je napisana tako, da jo lahko berejo najstniki ali morda celo mlajši. Vendar ne moremo reči, da gre za otroško knjigo. Čeprav je napisana v stilu, ki je popolnoma primeren za najstniškega bralca, bo pritegnila tudi marsikaterega odraslega človeka, ki bo posegel po njej. Ne glede na to, kakšno matematično predznanje ima bralec, bo ob branju te knjige spoznal nekatera čudovita matematična dejstva, ki jih prej ni poznal, ter občutil zadovoljstvo ob razumevanju. Omeniti je treba, da se v knjigi pojavijo besede, kot so: Rouleauxov trikotnik, epicikloidna krivulja, brahistrohrona krivulja, tavtohrona krivulja, ki se bodo mlademu bralcu najverjetneje zdele neznane in težke, vendar pa za samo razumevanje besedila niso bistvene.

V knjigi so predstavljene matematične vsebine in modeli, ki se do sedaj še nikoli niso pojavili v knjigah podobnih zvrsti; npr. obrnljiva telesa, tlakovanje ravnine s kosi, ki jih dobimo iz razrezanih tetraedrov, in dvofunkcijska telesa, ki so izpeljana iz avtorjevih lastnih znanstvenih člankov, objavljenih v matematičnih revijah. Knjiga je privlačna tudi na pogled. Pritegne nas že ob samem listanju, saj vsebuje veliko živahnih barvnih ilustracij potepanja po Deželi matematičnih čudes. Na koncu je naveden obširen seznam virov ter osnovni podatki o avtorjih knjige.

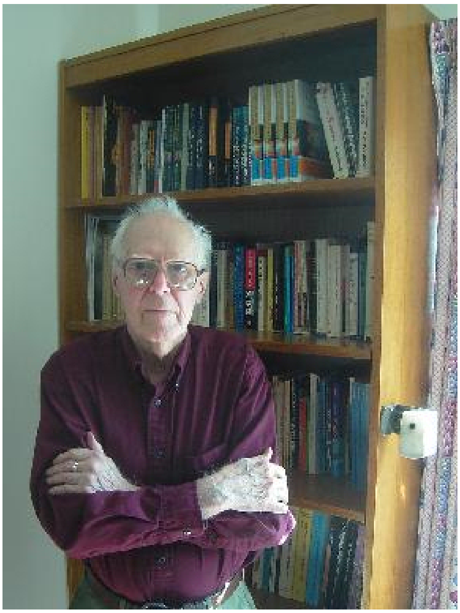
Namen knjige je vzbuditi pri mladih zanimanje za matematiko ter jim na zanimiv način približati nekatere matematične vsebine. Iz te knjige se lahko veliko naučijo tudi starši in učitelji. Slednjim je lahko odličen pripomoček za popestritev učnih ur matematike ter vir novih idej.

Knjižico lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 16,00 EUR.

Darja Antolin

VESTI

MARTIN GARDNER (21. 10. 1914 – 22. 5. 2010)



Letos je v 96. letu življenja umrl svetovno znani popularizator matematike Martin Gardner. Po diplomi iz filozofije l. 1936 na chicaški univerzi se je ukvarjal z novinarstvom, 2. svetovno vojno preživel v ameriški mornarici, nato pa se je posvetil pisanju literarnih, filozofskih in znanstvenokritičnih člankov za različne časopise, zanimali pa so ga tudi magični triki.

Za popularizacijo matematike je pomembno njegovo pisanje rubrike *Matematične igre* (Mathematical Games) v po svetu zelo razširjenem mesečniku Scientific American, ki je nepretrgoma trajalo od leta 1957 do 1981. Za mnoge je bila to prava akademija razvedrilne matematike in mnoge, predvsem v Ameriki, je ravno to usmerilo v študij matematike. Lahko rečemo, da je odprl oči splošne javnosti za lepoto in zanimivost matematike, čeprav sam ni imel formalne matematične izobrazbe. Marsikateri pomemben matematični pojem je svet spoznal prek Gardnerja, še preden se je pojavil v drugih revijah. Članke je nato dopolnil in izdal v številnih knjigah, ki so prevedene v večino svetovnih jezikov. V slovenščini smo dobili edini Gardnerjev prevod leta 1988 (in leta 1992 ponatis), ko je Državna založba izdala knjigo AHA! PA TE IMAM v prevodu Tamare Bohte. Prevod druge se je tudi pripravljal, vendar je DZS leta 1992 zbirko Z logiko v leto 2000 opustila.

Gardner je bil vse življenje, kot bi pri nas rekli, samostojen kulturni delavec, živel je torej le od pisanja. In do konca življenja se je pod njegovim avtorstvom nabralo kar okoli 70 knjig. Bil je bolj plašne narave in se je izogibal javnemu nastopanju. Tako je odklanjal nagrade in časti, če so bile povezane z nastopom. Leta 1993 ga je zbiralec ugank T. Rogers prepričal, da se je udeležil večera, posvečenega reševanju Gardnerjevih problemov. Enako se je zgodilo leta 1996. Od tedaj se vsako sodo leto zberejo Gardnerjevi privrženci (npr. John H. Conway, Raymond Smullyan) – brez Gardnerja – na konferenci, imenovani Gathering for Gardner (Zbor za Gardnerja), kjer je na sporedu razvedrilna matematika, ki jo posamezniki gojijo. G4G9 je bila marca letos.

LITERATURA

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Martin_Gardner

[2] http://www.g4g4.com/

Izidor Hafner

Iz intervjuja, ki ga je z M. Gardnerjem leta 2004 opravil Don Albers, objavljen je bil v This Side of the Pond, The Blog of Cambridge University Press, 30. septembra 2008, http://www.cambridgeblog.org/2008/09/the-martin-gardner-interview/ navajamo:

Matematika mi je v tako veselje, ker ima nenavadno, nezemeljsko lepoto. Težko je opisati močan občutek ugodja ob študiju elegantnega dokaza; ta občutek je še močnejši ob odkritju prej neznanega dokaza. To sem na nizkem nivoju izkusil štirikrat: (1) Odkril sem najmanjše možno število ostrokotnih trikotnikov, na katero lahko razrežemo kvadrat. (Coxeter je vključil razrez v *svojo klasiko Introduction to Geometry.) (2) Našel sem minimalno omrežje Steinerjevih dreves, ki povezujejo vse vogale šahovnice. (3) Z dvobarvanjem sem dokazal, da je v vsakem večkotniku z dolžinami stranic v zaporedju 1, 2, 3 ... in koti 90 ali 270 stopinj – število stranic deljivo z 8. (4) Razvil sem nov diagramski opis izjavne logike.*

VPRAŠANJA IN ODGOVORI

Spoštovani bralci, tokrat vam v zabavo in izziv ponujamo nekaj nalog M. Gardnerja. Za začetek lahko poiščete osemkotnik z lastnostmi, omenjenimi v točki (3) zgornje Gardnerjeve izjave. Spodnje naloge 1–9 je pripravil Izidor Hafner, 10. nalogo je prispeval naš bralec Etbin Bras, zadnja pa je naša priredba neke Gardnerjeve naloge. Večina nalog izhaja iz Gardnerjevih prispevkov za Scientific American.

Tudi tokrat vas vabimo, da nam pošljete svoje rešitve ter predloge nalog na naslov `zaloznistvo@dmfa.si`. Rešitve bomo objavili v eni naslednjih številk.

1. Zakaj brivec v Ženevi raje obrije dva Francoza kot enega Nemca?

2. Pri katerih treh naravnih številih je vsota enaka njihovemu produktu?

3. V enakokrakem trikotniku sta kraka dolžine 1. Koliko je dolžina osnovnice, če ima trikotnik maksimalno možno ploščino?

4. Kateri znani angleški rek je izražen s spodnjim stavkom simbolne logike? $2B \vee \neg 2B = ?$

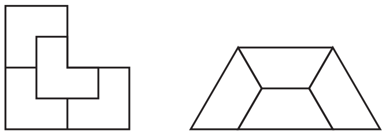
5. Nekega julija opolnoči je v Omahi močno deževalo. Ali je možno, da je bilo po 72 urah sončno?

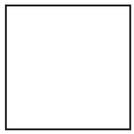
6. „Gospod Novak ima več kot tisoč knjig,“ pravi Janez.
   „Ne, manj jih ima,“ zanika Peter.
   „Gotovo ima vsaj eno,“ je prepričana Tina.

   Če je samo ena od zgornjih trditev resnična, koliko knjig ima gospod Novak?

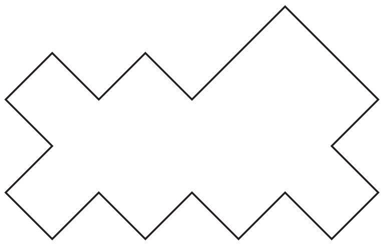
7. Kako je bilo ime sekretarju OZN pred 35 leti?

8. Spodnji sliki prikazujeta razdelitev lika na štiri skladne dele. Tvoja naloga je, da razdeliš kvadrat na pet skladnih delov.





9. Z eno (ne nujno ravno) črto razdeli lik na dva skladna dela.



10. Preglednico dopolni tako, da bo v drugi vrstici pod vsako števko zapisano število pojavitev te števke v preglednici. (Naloga ima dve rešitvi.)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

11. Na vrtiljaku so konjički postavljeni v radialnih vrstah, ki se raztezajo prek zunanjih dveh tretjin polmera vrtiljaka. Ob vrtiljaku stoji Anja, ki želi prešteti število vrst s konjički. Na vrtiljaku je David, ki ji je pripravljen nagajivo pomagati. Namesto da bi stal na mestu, hodi po zunanjem robu vrtiljaka v smeri njegovega vrtenja. David Anji pove, da gre med njunima zaporednima srečanjema mimo 20 konjičkov. Nato se premakne do notranje vrste konjičkov, kjer ob dvakrat hitrejšem teku v nasprotni smeri med zaporednima srečanjema prečka 40 vrst. V koliko vrstah stojijo konjički na vrtiljaku?

ZOISOVE NAGRADE 2010

V Cankarjevem domu so 23. novembra 2010 podelili Zoisove nagrade in priznanja. Med nagrajenci so tudi trije člani DMFA. Prof. dr. Janez Dolinšek je prejel Zoisovo nagrado za vrhunske dosežke pri raziskavah fizikalnih lastnosti novih kompleksnih materialov na kovinski osnovi, prof. dr. Andrej Jamnik je prejel Zoisovo priznanje za pomembne dosežke v fizikalni kemiji, prof. dr. Janez Mrčun pa Zoisovo priznanje za pomembne dosežke v matematiki. Uredništvo vsem čestita za uspeh.

Zoisova nagrada za vrhunske dosežke

Prof. dr. Janez Dolinšek

Profesor dr. Janez Dolinšek s Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani ter Instituta Jožefa Stefana je prejel Zoisovo nagrado za raziskave fizikalnih lastnosti novih kompleksnih materialov na kovinski osnovi. Nagrada je bila podeljena za več odmevnih rezultatov. Raziskovalni skupini prof. J. Dolinška je v letu 2009 uspel znanstveno-tehnološki preboj na področju shranjevanja digitalnih podatkov, saj so razvili termično spominsko celico za digitalne aplikacije, ki deluje na osnovi spremembe temperature brez prisotnosti električnega ali magnetnega polja. Termični spomin s termičnim zapisom digitalne informacije je konceptualno nova vrsta digitalnega spomina.

Raziskovalna skupina prof. Dolinška je bila uspešna tudi na področju „pametnih“ materialov z odkritjem kovinskih kvaziperiodičnih spojin družine Al–Cr–Fe in epsilon faz v sistemu Al–Pd–prehodni element, v katerih nastopa doslej še neznana kombinacija električni prevodnik-toplotni izolator z električno prevodnostjo, tipično za kovine, in toplotno prevodnostjo, enako okenskemu steklu. Odkritje omogoča izdelavo električno prevodnih kovinskih elementov, ki se pod tokom grejejo bistveno manj kot klasične kovine.

Prof. J. Dolinšek je s sodelavci v letih 2003–2006 z NMR spektroskopijo raziskoval vpliv spinske orientacije sosednjih Mn magnetnih momentov na električno upornost v manganovih perovskitih in prispeval k boljšemu razumevanju pojava kolosalne magnetoupornosti. To je lastnost materialov, da pod vplivom magnetnega polja dramatično spremenijo svoj električni upor. Pojav je doživel široko uporabo v magnetnih spominskih medijih, kjer je omogočil povečanje hitrosti magnetnega zapisovanja in čitanja digitalnih podatkov. Za odkritje pojava sta Grünberg in Fert leta 2007 prejela Nobelovo nagrado za fiziko. Pojav teoretično še danes ni povsem pojasnjen, zato se raziskave nadaljujejo.

Raziskovalna skupina prof. J. Dolinška je raziskovala fizikalne lastnosti kvazikristalov (magnetizem, električne in termične transportne lastnosti, dinamika kvazikristalov z NMR spektroskopijo) in rešila nekatera pomembna vprašanja fizike teh nenavadnih kovinskih spojin. Kvazikristali so spojine kovinskih elementov, v katerih obstaja nov strukturni red dolgega dosega brez translacijske simetrije. Kvazikristali imajo zanimive fizikalne lastnosti, ki kažejo na možnost njihove široke uporabe. So trši od jekel, kemijsko nereaktivni (ne korodirajo), slabi električni in toplotni prevodniki, imajo majhen količnik trenja. Raziskave so razširili na kompleksne kovinske spojine; pojasnili so nekatera pomembna vprašanja fizike teh nenavadnih kovinskih spojin, ki so nova vrsta trdnih snovi v kristalnem stanju z gigantskimi osnovnimi celicami, v katerih je od nekaj sto do nekaj tisoč atomov. Kompleksne kovinske spojine kažejo dualnost; na veliki skali so periodični kristali, na majhni skali pa so kvazikristali. Poleg tega kažejo „pametne“ kombinacije nezdružljivih lastnosti, kot so električni prevodnik-toplotni izolator ter kombinacijo trdote, elastičnosti in majhnega količnika trenja. Njihova struktura omogoča skladiščenje velikih količin vodika, zato so primerne za uporabo pri skladiščenju vodika za potrebe gorivnih celic. Mobilnost vodika v kovinskih hidridnih fazah je pomembna lastnost materialov za skladiščenje vodika. Mobilnost je povezana z difuzijsko konstanto vodika, vendar doslej ni bilo ustreznih eksperimentalnih metod za direktno določitev izredno majhne difuzijske konstante vodika v kovinskih hidridnih fazah. Prof. J. Dolinšek in sodelavci so problem rešili z mersko metodo za direktno določitev difuzijske konstante na osnovi NMR spektroskopije. Pri tem so uporabili ultramočne statične gradiente stresanega magnetnega polja superprevodnega magneta in tako pomaknili detekcijski prag difuzijske konstante navzdol za tri rede velikosti.

Znanstveno delo prof. dr. Janeza Dolinška na področju raziskav fizikalnih lastnosti novih kompleksnih materialov na kovinski osnovi je izredno obširno in obsega skupno 74 originalnih člankov v mednarodnih revijah v obdobju 2003–2009. Dela prinašajo vrhunske rezultate v obliki novih konceptov in idej, pomembnih za nadaljnji razvoj znanosti v svetu na področju fizike naprednih materialov, ter nove eksperimentalne in teoretične metode za raziskave fizike snovi. Pomembna neodvisna mednarodna potrditev omenjenih dejstev je bilo tudi to, da je Komisija EU za znanost dodelila Institutu Jožefa Stefana stalno letno Evropsko šolo o znanosti materialov in imenovala prof. dr. Janeza Dolinška za njenega direktorja in glavnega organizatorja.

Zoisovo priznanje za pomembne dosežke v fizikalni kemiji

Prof. dr. Andrej Jamnik

Dr. Andrej Jamnik je študiral kemijo na Oddelku za kemijo FNT Univerze v Ljubljani. Po doktoratu s čisto teoretičnega področja fizikalne kemije, ki ga je opravil pod mentorstvom prof. dr. Dušana Bratka, je bil na podoktorskem izpopolnjevanju v Gradcu v Avstriji.

Namen tega izpopolnjevanja je bilo učenje teoretičnega ozadja in eksperimentalnih veščin metode ozkokotnega rentgenskega sipanja, ki se uporablja za raziskave strukturnih značilnosti koloidnih (nano)sistemov, končni cilj pa uvedba te eksperimentalne tehnike v laboratorij v Ljubljani. Dr. Andrej Jamnik, sedaj izredni profesor na Fakulteti za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Ljubljani, je avtor izvirnih znanstvenih dosežkov na področju fizikalno-kemijskih raziskav tekočin in raztopin v homogeni fazi ter v nehomogenem okolju, ko so ti sistemi pod vplivom zunanjega polja.

Pri svojem raziskovalnem delu uspešno združuje teoretične in eksperimentalne raziskave. Pri teoretični obravnavi meddelčnih prostorskih korelacij v homogenih in nehomogenih sistemih uporablja metode statistične mehanike, kot so integralske enačbe, teorija gostotnega funkcionala in simulacija Monte Carlo (MC). Teoretične rezultate primerja z rezultati, dobljenimi z meritvami ozkokotnega rentgenskega sipanja. Med njegove najpomembnejše dosežke spada razvoj metode za izračun rentgenskega sipanja delcev na osnovi simulacije MC in posplošitev algoritma za simulacijo enokomponentnega modelnega sistema adhezivnih kroglic (angl. „Adhesive Hard Sphere model“, AHS) – to je medmolekulskega potenciala, ki vzorči privlačne interakcije pri eni sami kontaktni razdalji na mešanice s poljubno mnogo komponentami. Delo daje osnovo za študij mešanic koloidnih delcev, kjer je doseg sil med koloidnimi delci precej krajši od njihovih dimenzij, njegova razširitev na asimetrične sisteme pa omogoča obravnavo liofilne interakcije med koloidnimi delci v disperziji. S simulacijo MC ter z Ornstein-Zernike (OZ) integralsko enačbo v Percus-Yevickovem (PY) približku je dr. Jamnik obravnaval lastnosti binarnih mešanic v homogenem sistemu ter njihovo strukturo in adsorpcijo v planarnih porah, ki ponazarjajo porozno snov. Pokazal je, da se v porozni snovi posamezni komponenti mešanice absorbirata selektivno, kar vodi do njune delne ločitve iz mešanice. Simulacijo MC je razširil na odprte sisteme, kjer je vpeljal izvirno tehniko dodajanja in odvzemanja delcev, ki se je izkazala za zelo učinkovito. Model za nesimetrično binarno mešanico je uporabil za obravnavo urejanja privlačnih koloidnih delcev dvokomponentne koloidne disperzije ob togi trdni površini in za študij prispevka topila k sili med koloidnimi delci. Silo je računal z uporabo posebne tehnike kanonične simulacije, ki omogoča ločeno vzorčenje prispevkov zveznega in nezveznega dela potenciala interakcije koloid-molekule topila na celotno silo med koloidnimi delci. Pokazal je, da pri dovolj močnih privlačnih interakcijah med molekulami topila postane sila daljnosežna in privlačna pri vseh razdaljah med koloidi. In nadalje, da odbojne interakcije koloid-molekule topila vodijo do privlačne sile med koloidnimi delci, nasprotno pa privlačne interakcije med koloidom in topilom povzročijo odbojno silo med koloidi. Primerjava med rezultati, ki jih je dobil z rešitvijo PY/OZ integralske enačbe, ter simulacijami kaže, da se teorija zadovoljivo obnese tako pri homogenih kot tudi nehomogenih sistemih. Skupaj s sodelavci je razvil metodo za račun rentgenskega sipanja delcev na osnovi rezultatov simulacije MC. S simulacijo MC v izobarnem ansamblu je računal sipanje modelnih alkoholov in aldehidov ter izračunane vrednosti primerjal z meritvami. Intenziteto sipanja je računal na osnovi znane Debyjeve enačbe in z metodo recipročne mreže. Za odstranitev sipanja ozadja, to je sipanja celotne MC škatle, katere velikost pokaže zgornjo mejo opazovanih dimenzij, so avtorji predlagali vrsto postopkov. Ta metoda omogoča direktno primerjavo izračunanih sipalnih krivulj z eksperimentalnimi rezultati, to je brez običajne poprejšnje ločitve celotnega sipanja na prispevka strukture sipajočih delcev ter interakcij med njimi. Omogoča tudi izvedbo teoretične različice eksperimentalnega postopka variacije kontrasta, ki se sicer često uporablja pri eksperimentalni metodi ozkokotnega nevtronskega sipanja. Dr. Jamnik je rezultate raziskav objavil v zelo uglednih revijah s področja fizikalne kemije in kemijske fizike.

Zoisovo priznanje za pomembne dosežke v matematiki

Prof. dr. Janez Mrčun

Rodil se je leta 1966 v Ljubljani. V letu 1996 je doktoriral na Matematičnem inštitutu Univerze v Utrechtu na Nizozemskem. Od leta 1996 je zaposlen na Oddelku za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

Na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko je bil v letih od 2001 do 2004 nosilec raziskovalnega projekta Algebraične invariante Liejevih grupoidov, ki ga je Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije uvrstilo na nacionalno listo temeljnih raziskovalnih projektov. Od leta 2009 dalje je vodja temeljnega raziskovalnega projekta Foliacije, orbiterosti in Liejevi grupoidi, ki ga za dobo treh let financira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.

Vabljena predavanja je imel med drugim tudi v Bures-sur-Yvette (IHES), na Dunaju (ESI) in na univerzah v Amsterdamu, Bruslju, Helsinkih, Manchestru in Strasbourgu. Skupaj z I. Moerdijkom je soavtor znanstvene monografije Introduction to Foliations and Lie Groupoids (Cambridge University Press, 2003).

V svojem delu se osredotoča na raziskave nekaterih pomembnih tipov geometrijskih struktur s singularnostmi, ki jih obravnava s teorijo Liejevih grupoidov. Znanstveno delo dr. Janeza Mrčuna je bilo v zadnjem obdobju zelo plodovito in je prineslo bistveno nova spoznanja na področju teorije Liejevih grupoidov in Liejevih algebroidov, ki so pomembno vplivala na razvoj matematičnega raziskovanja na tem področju v svetovnem merilu. Njegove znanstvene objave so skoraj brez izjeme daljša in poglobljena dela, objavljena v odličnih, nekatera celo v elitnih matematičnih revijah. Citiranost njegovih del, kakor tudi pogosta vabila na znanstvene obiske in predavanja na mednarodnih matematičnih konferencah dokazujejo, da so raziskave dr. Mrčuna pritegnile veliko pozornost v mednarodnem merilu. Soavtorstvo v znanstveni monografiji pri Cambridge University Press kaže, da dr. Mrčun sodi med vodilne avtoritete na svojem področju v svetovnem merilu.

LITERATURA

[1] http://www.mvzt.gov.si/nc/si/splosno/cns/novica/article/94/6829/81776d9a2a/ (ogled 15. 12. 2010)

[2] osebna korespondenca

Aleš Mohorič

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETIH 2009 IN 2010[1]

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 28 novih članov:

2304. Blenkuš Domen
2305. Červan Lea
2306. Čuk Kozoderc Polona
2307. Gogala Jaka
2308. Gorinšek Suzana
2309. Gorše Jan
2310. Guštin Andrej
2311. Jezernik Urban
2312. Juričinec Maja
2313. Kebe Sara
2314. Kodba Stane
2315. Kukec Mezek Miha
2316. Lesjak Mihaela
2317. Novak Klemen
2318. Obrez Marko
2319. Orel Marko
2320. Pestotnik Rok
2321. Pezdirc Matej
2322. Prah Jože
2323. Rožič Brigita
2324. Šoštarič Martina
2325. Švagan Majda
2326. Škulj Jasna
2327. Trošt Simon
2328. Urbančič Jurij
2329. Valentan Milena
2330. Vovk Simon
2331. Žvokelj Mojca

Letos se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 7 novih članov:

2332. Hauko Nataša
2333. Klinc Metka
2334. Kovič Miloš
2335. Radovič Marija
2336. Režonja Valerija
2337. Simonič Aleksander
2338. Tepej Jočić Lucija

Tadeja Šekoranja

[1] Novi člani DMFA Slovenije za leto 2008 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **56** (2009) 3, stran XI.

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 57 (2010)
številke 1–6, strani 1–240

Članki — Articles

Šola — School

Intervju — Interview

Vprašanja in odgovori — Questions and Answers

Nove knjige — New books

Vesti — News

http://www.obzornik.si/

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, NOVEMBER 2010
Letnik 57, številka 6
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici je Leonhard Paul Euler, švicarski matematik, fizik in astronom, rojen 15. aprila 1707 v Baslu, Švica, umrl 18. septembra 1783, Sankt Peterburg, Rusija. Velja za enega najpomembnejših matematikov 18. stoletja kot tudi vseh časov. Njegova odkritja sežejo na različna področja matematike, na primer v infinitezimalni račun, teorijo števil in teorijo grafov. Poleg tega je uvedel veliko sodobnih matematičnih pojmov in oznak, še posebej v matematični analizi, na primer pojem funkcije. Zelo pomembna so tudi njegova dela iz mehanike, dinamike tekočin, optike in astronomije.