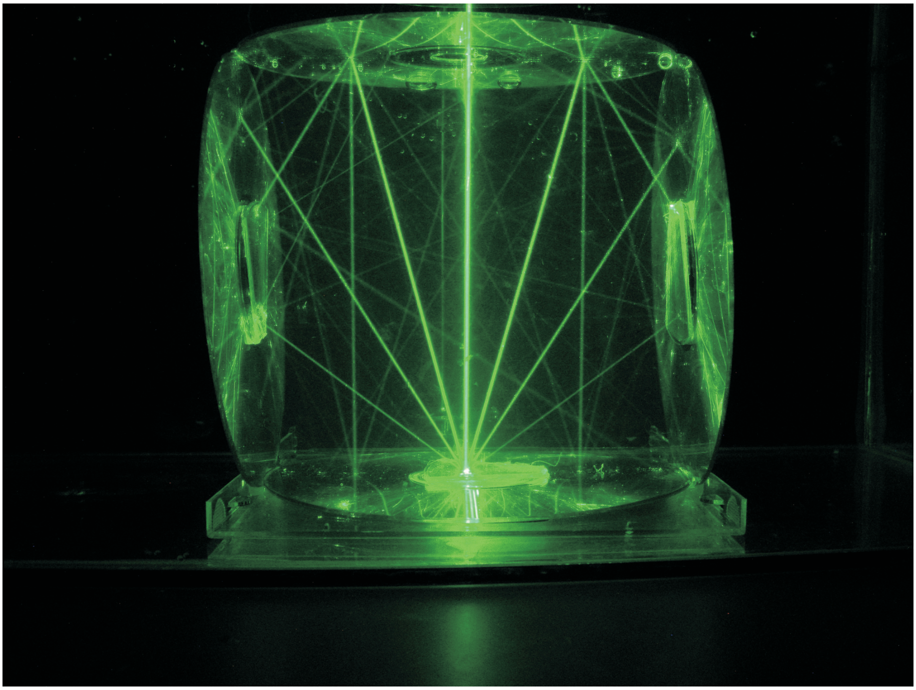
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2011
Letnik 58
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 58 • ŠT. 1 • STR. 1–40 • JANUAR 2011

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2011, letnik 58, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

BASELSKI PROBLEM

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A99, 40-03, 40A25

V članku obravnavamo Eulerjev pristop k reševanju baselskega problema. Podrobneje je predstavljena njegova prva rešitev, v nadaljevanju članka pa sledi opis kasnejšega dopolnjevanja dokaza.

THE BASEL PROBLEM

The article discusses Euler's method of solving the Basel problem. While the first part of the article presents his first solution in detail, the rest of the article describes how the proof was later completed.

Uvod

Z neskončnimi vrstami se je srečal že starogrški matematik **Arhimed** (287–212 pr. n. št.) pri kvadraturi odseka parabole in tako dokazal konvergenco geometrijske vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}\,.$$

Prav tako je ena prvih preučevanih vrst harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

za katero je najzgodnejši dokaz divergence v 14. stoletju podal Francoz **Nicole Oresme** (1323–1382).

Za obdobje pravega razmaha raziskovanja neskončnih vrst pa štejemo 17. stoletje. V tem času so matematiki odkrili logaritme in za natančno računanje so potrebovali natančne tabele. Logaritemsko funkcijo so razvili v potenčno vrsto, ki ji danes pravimo *Taylorjeva* (**Brook Taylor** (1685–1731)), čeprav sta podobne razvoje odkrila že **Nicholas Mercator** (1620–1687) in **James Gregory** (1638–1675). Kot primer takšne vrste se pogosto navaja

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\,, \tag{1}$$

s konvergenčnim območjem $(-1,1]$.

Okoli leta 1650 se je **Pietro Mengoli** (1625–1686) v *Novae quadraturae arithmeticae* ukvarjal z izračunom vsote vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,. \tag{2}$$

Problema sta se lotila tudi angleška matematika **John Wallis** (1616–1703) in **Henry Oldenburg** (1615–1677). Wallis je v knjigi *Arithmetica infinitorum* (1655) izračunal vsoto vrste (2) na tri decimalna mesta natančno, Oldenburg pa je leta 1673 s problemom seznanil **Gottfrieda Leibniza** (1646–1716).

Leibniz se je v tem času ukvarjal z izračunom vsote vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

njeni členi se pojavijo v *harmoničnem trikotniku*[1], in jo izračunal, takole:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

A problem, ki ga je odprl Mengoli, je ostal nerešen. Leibniz je za pomoč zaprosil **Jakoba Bernoullija** (1654–1705), enega največjih matematikov tistega časa.

Jakob Bernoulli je leta 1689 napisal knjigo *Tractatus de seriebus infinitis*, v kateri je podrobno obravnaval nekatere neskončne vrste, med drugim tudi vrsto (2). Najprej je pokazal, da za vsak $k \geq 1$ velja

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}\,.$$

Potem je brez zadržkov zapisal

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots \leq \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{2}{k(k+1)} + \cdots = 2$$

in zaključil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2\,.$$

[1] Označimo s $H_{i,j}$ število v i-ti vrstici in j-tem stolpcu harmoničnega trikotnika, pri čemer je $j \leq i$. Naj velja $H_{i,1} = 1/i$. Preostala števila generiramo z rekurzijo $H_{i,j} - H_{i+1,j} = H_{i+1,j+1}$.

Za Jakoba Bernoullija je bil to dovolj dober argument pri dokazu konvergence vrste (2). Kljub uspehu pa nikakor ni znal izračunati njene vsote v zaključeni obliki. Priznal je poraz in v *Tractatus* zapisal naslednji stavek:

Če kdo najde in nam pove, kar se nam je dotlej kljub naporom izmikalo, večna mu bo naša hvaležnost.[2]

S tem je bila matematična javnost seznanjena s problemom, ki je danes znan kot *baselski*[3] *problem.*

Eulerjevi numerični rezultati

Ni znano, kdaj je **Leonhard Euler** (1707–1783) prvič izvedel za baselski problem, dejstvo pa je, da je bil njegov zasebni učitelj matematike **Johann Bernoulli** (1667–1748), Jakobov brat. Zato mnogi predvidevajo, da je prav Johann seznanil Eulerja s problemom.

Med letoma 1727 in 1733 sta **Daniel Bernoulli** (1700–1782), Johannov sin, in Euler delovala v Sankt Peterburgu. Verjetno sta razpravljala tudi o tem problemu, saj je Euler v članku *De summatione innumerabilium progressionum*[4] leta 1731 opisal postopek za hitrejši numerični izračun vsote vrste (2). Euler je želel izračunati vsoto na nekaj decimalnih mest natančno, vendar bi moral sešteti vsaj tisoč členov, da bi bil rezultat natančen na komaj tri decimalna mesta.

Eulerjeva metoda je bila izraziti določeni integral

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{\ln(1-x)}{x} \right) dx$$

na dva različna načina. Pri prvem je funkcijo $\ln(1-x)$ zamenjal z vrsto (1) in integriral

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}\,.$$

Pri drugem načinu je naredil substitucijo $1-x=y$ in dobil

$$I = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln y}{1-y} dy\,.$$

[2] [5], str. 42

[3] Basel, mesto v Švici in kraj, kjer je bil *Tractatus* napisan.

[4] Objavljen leta 1738 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5*, str. 91–105.

Potem je integrand razvil v vrsto, vsak člen integriral z metodo *per partes* in dobil

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - (\ln 2)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}\,.$$

Po primerjavi rezultatov obeh načinov je zapisal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2} + (\ln 2)^2.$$

Število $\ln 2$ je preprosto izrazil z vrsto (1) in seštel prvih dvajset členov, torej

$$\ln 2 = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \approx \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n 2^n} \approx 0{,}6931471\,,$$

in nato še

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2} \approx \sum_{n=1}^{14} \frac{1}{2^{n-1} n^2} \approx 1{,}1644806\,.$$

Tako je dobil vsoto vrste na šest decimalnih mest natančno:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1{,}644934\,.$$

Pri tej izpeljavi je lepo vidno Eulerjevo manipuliranje z izrazi, kot so vrste in integrali. Tak način dela je postal njegova stalnica in še danes vpliva na celotno matematiko.

Naslednjo numerično metodo je Euler opisal v članku *Methodus generalis summandi progressiones*[5] leta 1732. Uporabil je t. i. *Eulerjevo sumacijsko formulo*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=a}^{b} f(n) &= \int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{r} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) \\
&+ \frac{1}{(2r+1)!}\int_a^b B_{2r+1}(x - \lfloor x \rfloor) f^{(2r+1)}(x)dx, \qquad (3)
\end{aligned}$$

[5] Objavljen leta 1738 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6*, str. 68–97.

kjer je funkcija f vsaj $(2r+1)$-krat zvezno odvedljiva na intervalu $[a,b]$, pri čemer sta a in b celi števili, r pa je poljubno naravno število. Zadnji integral pomeni ostanek in je bil dodan kasneje. Števila B_n se imenujejo *Bernoullijeva števila*, funkcije $B_n(x)$ pa *Bernoullijevi polinomi*. Dokaz formule je Euler objavil leta 1735, bralec pa si lahko podrobnejši dokaz pogleda v [3, str. 522]. Euler je formulo takoj začel uporabljati na najrazličnejših primerih, tudi na vrsti (2). Ročno je izračunal

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} = \frac{1968329}{1270080} \approx 1{,}54976773116654069035\,.$$

Preostanek vrste je izračunal po (3) za $a=11$, $b\to\infty$, $r=13$ in dobil

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{2\cdot 11^2} + \sum_{k=1}^{13} \frac{B_{2k}}{11^{2k+1}} \approx 0{,}09516633568168574612\,,$$

kar je skupaj prineslo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1{,}64493406684822643647\,.$$

Prvi neenačaj je tam zato, ker smo izpustili ostanek sumacijske formule. Število r je sicer poljubno, vendar vpliva na natančnost rezultata in se določi na podlagi ocenitve ostanka (zgoraj vzeti r smo določili na tak način).

S tem je bila vsota vrste izračunana na dvajset decimalnih mest natančno. Čeprav Euler še vedno ni bil zadovoljen (baselski problem je spraševal po natančni vsoti), je njegova sumacijska metoda postala nepogrešljivo orodje pri raziskovanju asimptotičnega vedenja vrst in velikih števil ter tako posredno prispevala tudi k dokazu *praštevilskega izreka*[6].

Rešitev

Leta 1735 je Euler našel rešitev in jo opisal v članku *De summis serierum reciprocarum*[7].

Eulerjeva rešitev temelji na posplošitvi *Newton-Girardove formule* (**Isaac Newton** (1642–1727), **Albert Girard** (1595–1632). Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$

[6] Naj $\pi(x)$ označuje število praštevil, ki ne presegajo x. Izjavo, da je $\lim_{x\to\infty}(\pi(x)\log x)/x = 1$, imenujemo praštevilski izrek.

[7] Objavljen leta 1740 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7*, str. 123–134.

poljubna realna števila. Izraz oblike

$$\sigma_k = \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$$

imenujemo *k-ti elementarni simetrični polinom* števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Posebej definiramo: $\sigma_0 = 1$. Naj bo $S_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k$, kar je tudi simetrični polinom, toda ne vedno elementaren. Newton-Girardova formula povezuje simetrične polinome S_k in elementarne simetrične polinome σ_k:

$$m\sigma_m + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k S_k \sigma_{m-k} = 0; \qquad 1 \le m \le n\,.$$

Od tu kaj hitro sledi zapis vsote S_k samo s simetričnimi polinomi

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_1, \\ S_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ S_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Formula velja za poljubno veliko naravno število n. Euler je šel v skrajnost in privzel, da formula velja tudi za neskončno zaporedje. Obravnaval je neskončne produkte in pripadajoče potenčne vrste oblike

$$\left(1 - \frac{x}{A}\right)\left(1 - \frac{x}{B}\right)\left(1 - \frac{x}{C}\right) \cdots = 1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 \pm \ldots \tag{5}$$

Po primerjavi obeh strani je zapisal

$$\alpha = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \cdots, \quad \beta = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} + \cdots, \quad \gamma = \frac{1}{ABC} + \ldots$$

in po uporabi posplošenih formul (4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \cdots &= \alpha, \\ \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} + \cdots &= \alpha^2 - 2\beta, \\ \frac{1}{A^3} + \frac{1}{B^3} + \frac{1}{C^3} + \cdots &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Euler je obliko v (5) izbral še z drugim namenom. Množica $A, B, C, \ldots$ predstavlja ničle neskončnega produkta. Izraz (5) pa zagotavlja, da so to tudi vse ničle neskončne potenčne vrste. Očitno je, da to drži pri končnem produktu in vrsti. Ponovno je Euler posplošil primer na neskončnost.

Euler je svoje rezultate uporabil na funkciji

$$f(x) = 1 - \frac{\sin x}{\sin a}\,, \tag{7}$$

kjer je a fiksirano število, ki ni večkratnik števila π. Ničle funkcije f so

$$x = \begin{cases} a, \\ 2n\pi + a, \\ (2n-1)\pi - a, \\ -(2n\pi - a), \\ -((2n-1)\pi + a), \end{cases}$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$. Sledimo Eulerju in funkcijo zapišimo kot potenčno vrsto:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\sin a} + \frac{x^3}{3!\sin a} \mp \ldots$$

Upoštevamo (5) in dobimo

$$f(x) = \Big(1 - \frac{x}{a}\Big) \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x}{(2n-1)\pi - a}\Big) \cdot \Big(1 + \frac{x}{(2n-1)\pi + a}\Big) \cdot \\ \Big(1 - \frac{x}{2n\pi + a}\Big) \cdot \Big(1 + \frac{x}{2n\pi - a}\Big)\,. \tag{8}$$

Od tu z uporabo formul (6) sledi

$$\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(\frac{1}{n\pi - a} - \frac{1}{n\pi + a}\Big) = \frac{1}{\sin a}\,, \tag{9}$$

$$\frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n\pi - a)^2} + \frac{1}{(n\pi + a)^2}\Big) = \frac{1}{\sin^2 a}\,, \tag{10}$$

$$\frac{1}{a^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Big(\frac{1}{(n\pi - a)^3} - \frac{1}{(n\pi + a)^3}\Big) = \frac{1}{\sin^3 a} - \frac{1}{2\sin a}\,. \tag{11}$$

Naj bo $a = \frac{\pi}{2}$. Potem je po (10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Ker pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

lahko zaključimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

S tem je bil baselski problem po 46 letih rešen. Euler je rešitev zaupal Danielu Bernoulliju, vendar je kmalu vsak evropski matematik vedel, kdo je mladi genij. Ko je Johann Bernoulli izvedel za Eulerjev uspeh, je zapisal:

In tako je zadoščeno goreči bratovi želji, ki je spoznal, da je iskanje vsote težje, kot si kdor koli lahko predstavlja, in je javno priznal, da je ves njegov trud zaman. Ko bi le moj brat še živel.[8]

Nadaljnji rezultati in kritike

Euler se kljub uspehu, ki mu je zagotovil matematično kariero, ni ustavil. V prej omenjenem članku *De summis ...* je po (11) pri $a = \frac{\pi}{2}$ izračunal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Podobno kot funkcijo (7) je obravnaval $\frac{\sin x}{x}$ in dobil

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) , \tag{12}$$

od koder je z uporabo (6) izračunal še vrednosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450} ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{6825 \cdot 93555} .$$

Kmalu po objavi dokaza pa so prišle kritike. Daniel Bernoulli je Eulerju očital, da je v dokazu privzel, da Newton-Girardove formule veljajo za neskončno zaporedje in da je delal z neskončnimi vrstami kot s polinomi. Pojavili so se še drugi dvomi. Ali so vse rešitve enačbe $\sin x = \sin a$ realne?

[8] [2], str. 445

Zakaj ničle funkcije $f(x)$ določajo neskončni produkt tak, kot je? Tudi funkcija $e^x f(x)$ ima enake ničle, pa zagotovo ne more imeti istega neskončnega produkta. Teh težav se je zavedal tudi Euler, vendar je bil o veljavnosti svojih formul dokaj prepričan. Izračunani rezultati so se ujemali z numeričnimi, pri posebnih primerih pa je dobil že znane vrste. Npr. pri $a = \frac{\pi}{2}$ vrsta (9) postane znana

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

Prav tako pri $a = \frac{\pi}{4}$ dobimo

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,,$$

ki je bila znana že Newtonu. Produkt (12) pri $x = \frac{\pi}{2}$ postane znani *Wallisov produkt*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots}\,.$$

Ti posebni primeri so Eulerja opogumili, da je objavil rešitev. Kljub temu ga je radovednost gnala naprej in je v naslednjih sedmih letih svoje rezultate postavil na trdnejše temelje.

Začel je z dokazovanjem produkta (12), iz katerega je zlahka izpeljal podobne faktorizacije za druge kotne funkcije in s tem utemeljil produkt (8). Glavno orodje pri tem sta *Eulerjevi formuli*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\,,$$

s katerima je mimogrede dokazal, da imajo kotne funkcije samo realne ničle. Ko je bila pravilnost zapisa produkta (12) dokazana, se je lotil vrste (9). Dobil jo je kot rezultat logaritmiranja in odvajanja produkta (8). Postopek je opisal v članku *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur*[9] leta 1742, čeprav lahko upravičeno trdimo, da je do rezultatov prišel že prej.[10] Eulerjeva izpeljava postane ob upoštevanju enakomerne konvergence brezhibna. Preko vrste (9) je v splošnem dokazal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^{2k+1}} = \frac{E_{2k}}{2^{2k+2}(2k)!}\pi^{2k+1}\,,$$

[9] Objavljen leta 1743 v *Miscellanea Berolinensia 7*, str. 172–192.

[10] Eulerjeve formule se pojavijo v pismih **Christianu Goldbachu** (1690–1764) leta 1741 in 1742.

kjer se števila E_{2k} imenujejo *Eulerjeva števila*. Podobno je logaritmiral in odvajal še produkt (12) ter izpeljal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} .$$

Na tem mestu omenimo še, da je Euler, željan prepričati vse tiste, ki so dvomili o produktu (12), leta 1743 objavil članek *Démonstration de la somme de cette suite* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + etc.$[11], kjer je ponovno izračunal vsoto vrste (2). Temelj dokaza je izraz

$$\frac{(\arcsin x)^2}{2} = \int_0^x \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt ,$$

od koder je z razvojem $\arcsin x$ v potenčno vrsto dobil željeni rezultat. Podrobnosti izpeljave lahko bralec najde v [1, str. 1079].

Euler je našel vsote vrst in neskončnih produktov za nekatere posebne primere, nikakor pa ni našel natančne vsote vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} . \tag{13}$$

V članku *De seriebus quibusdam considerationes*[12], napisanem leta 1739, je numerično izračunal vsoto vrste za $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Pod vplivom rezultata pri sodih potencah je predpostavjal, da je vsota enaka $N\pi^{2k+1}$, in poskušal najti racionalen N. Vendar mu to ni uspelo.

Baselski problem po Eulerju

Članek bomo sklenili s tremi primeri, ki izhajajo iz baselskega problema in so matematike zaposlovali še dolgo časa po Eulerju.

Euler se je že leta 1737 zavedal pomembnosti vrste (2) v zvezi s praštevili. V članku *Variae observationes circa series infinitas*[13] je dokazal enakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} ,$$

[11] Objavljen v *Journ. lit. d'Allemange, de Suisse et du Nord*, 2:1, str. 115–127.

[12] Objavljen leta 1750 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 12*, str. 53–96.

[13] Objavljen leta 1744 v *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9*, str. 160–188.

kjer produkt teče po vseh praštevilih. Ta pomembni rezultat je temelj poznejše analitične teorije števil. **Bernhard Riemann** (1826–1866) je spoznal pomembnost vrste in jo obravnaval kot kompleksno funkcijsko vrsto, znano pod imenom *Riemannova funkcija zeta*. V prelomnem članku *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*[14] je dokazal znamenito funkcijsko enačbo

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)\,.$$

Manj znano pa je, da je Euler med intenzivnim iskanjem vsote vrste (13) v članku *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques*[15] leta 1749 objavil prav tako funkcijsko enačbo.

Omenili smo že težave pri predstavljanju funkcije z neskončnim produktom prek njenih ničel. Na to vprašanje je prvi odgovoril **Karl Weierstrass** (1815–1897) med preučevanjem analitičnih funkcij. Prav tako je Weierstrass zaslužen za uvedbo pojma enakomerne konvergence, s katerim je pojasnil upravičenost odvajanja in integriranja funkcijskih vrst.

Kaj pa danes vemo o skrivnostni vrsti (13)? Še vedno ne vemo, kakšna je njena vsota v zaključeni obliki. Znano pa je, da je vsota za $k = 1$ iracionalno število, kar je leta 1979 dokazal **Roger Apéry** (1916–1994). Najnovejši rezultati so iz let 2000 in 2001, ko je bilo dokazano, da za neskončno števil k vsota vrste predstavlja iracionalno število in da ima za $k = 2, 3, 4, 5$ vsaj ena od vrst iracionalno vsoto.

LITERATURA

[1] R. Ayoub, *Euler and the zeta function*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 10, 1067–1086 (1974).

[2] C. B. Boyer, *A history of mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1991.

[3] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, New York, Dover publications, 1990.

[4] V. S. Varadarajan, *Euler through time: a new look at old themes*, Washington, The Mathematical Association of America, 2006.

[5] W. Dunham, *Euler: the master of us all*, Washington, The Mathematical Association of America, 1999.

[6] E. W. Weisstein, *Newton-Girard Formulas*, MathWorld – A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/Newton-GirardFormulas.html.

[7] The Euler Archive, http://www.math.dartmouth.edu/∼euler/.

[14] Objavljen leta 1859 v *Monatsberichte der Berliner Akademie.*

[15] Objavljen leta 1768 v *Memoires de l'académie des sciences de Berlin 17*, str. 83–106.

ULTRAKRATKI LASERSKI SUNKI

URŠKA JELERČIČ IN IRENA DREVENŠEK OLENIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 42.65.Re, 42.55.Rz, 42.60.Fc, 42.65.Ky

V članku obravnavamo ultrakratke sunkovne laserske sisteme in opisujemo metode, s katerimi lahko v laserju *Ti:safir* generiramo femtosekundne in atosekundne pulze. Pri tem sledimo trem bistvenim tehnikam, ki jih uporabljamo pri tvorbi sunkov: metodi vklepanja faz resonatorskih nihanj, metodi ojačevanja na osnovi frekvenčne modulacije in metodi frekvenčnega pomnoževanja. Za konec predstavimo še možnosti izboljšav v prihodnosti.

ULTRASHORT LASER PULSES

We discuss ultrafast pulsed laser systems and describe methods of femtosecond and attosecond pulse generation in the case of *Ti:sapphire* laser. We describe three main techniques, which are used for the formation of pulses: mode-locking of resonator modes, amplification based on frequency modulation, and frequency multiplication. We also present potential improvements expected in the future.

Uvod

Maimanov prvi rubinski laser je javnost leta 1960 pospremila z mešanimi občutki. Medtem ko se je strokovna skupnost izuma navdušeno veselila in so konkurenti nanj gledali z veliko mero zavisti, se je splošna javnost nove tehnologije močno bala, saj so bili prepričani, da so znanstveniki ustvarili novo obliko orožja. Dandanes laserje malokdo povezuje z nevarnostjo in težko je zanikati njihov pozitivni vpliv na vsakdanje življenje. Spremenila pa se ni le javna podoba laserja, ampak tudi njegove zmogljivosti. Pri tem je enega najbolj dramatičnih razvojev doživelo področje ultrakratkih laserskih sunkov, ki se jim posvečamo v pričujočem članku. Izum tovrstnih laserjev je omogočil napredek v mnogih tehnoloških in raziskovalnih panogah. Laserji z ultrakratkimi sunki namreč omogočajo izjemno precizno dovajanje kratkih sunkov energije izbranim sistemom (bodisi mikroskopskim bodisi makroskopskim). Omenjeno natančnost izkoriščamo pri različnih tehničnih aplikacijah (predvsem v medicini kot alternativni način neinvazivnih terapij) in tudi v bazičnih raziskavah, pri preučevanju hitrih procesov, ki jih s primerno kratkimi laserskimi sunki sedaj lahko opazujemo v realnem času.

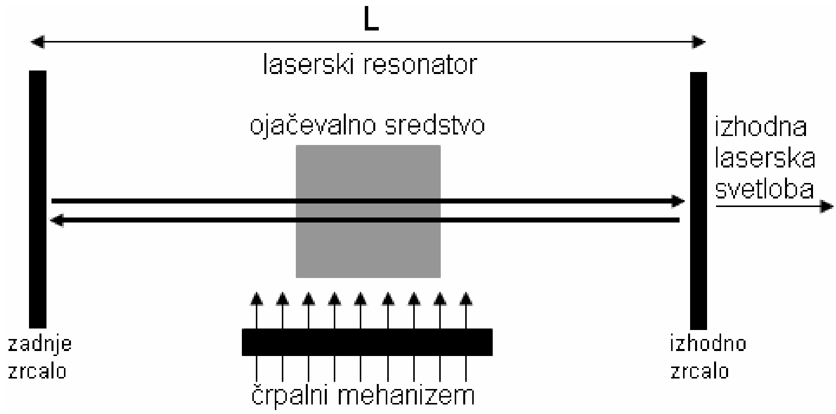
Delovanje laserja

Laser lahko deluje v kontinuiranem ali sunkovnem načinu, pri čemer velja, da lahko vsak kontinuirani laser uporabimo tudi kot sunkovni, obratno pa ne. Preprost laser lahko sestavimo iz treh osnovnih delov: resonatorja, ojačevalnega sredstva in črpalnega mehanizma (slika 1). Resonator je navadno sestavljen iz dveh zrcal, med katerima se svetloba odbija, pri čemer je eno od zrcal delno prepustno in omogoča izhajanje svetlobe iz resonatorja. Dolžina resonatorja določa možne frekvence laserskega spektra, ki pri uporabi ravnih zrcal (Fabry-Perotov resonator) znašajo:

$$\omega_N = \frac{\pi c N}{L}, \tag{1}$$

kjer je c hitrost svetlobe, L razdalja med zrcaloma, $N = 1, 2, 3 \ldots$ pa red lastnega nihanja elektromagnetnega polja. Ker resonator sam po sebi ne ojačuje svetlobe, pač pa se njena intenziteta zaradi izgub manjša, moramo za ojačevanje poskrbeti z ojačevalnim sredstvom, za kar lahko uporabimo snovi v različnih agregatnih stanjih: trdnem (polprevodniki, npr. GaAs, ali pa kristali, npr. Nd:YAG), plinastem (npr. CO_2) ali tekočem. Ojačevanje se zgodi, ko od zrcal odbita svetloba prehaja skozi ojačevalno sredstvo, ki ga shematsko opišemo kot množico energijskih nivojev (slika 2), pri tem pa se sproži stimulirano sevanje z višjih energijskih nivojev v nižje [1]. Ker je za ojačevanje potrebna obrnjena zasedenost energijskih stanj v snovi (večje število atomov mora biti v vzbujenem kot pa v osnovnem stanju), kar ni naravno stanje atomskega sistema, za vzpostavljanje potrebnih pogojev uporabljamo črpalni mehanizem. Tako pridobljena laserska svetloba je časovno neomejena, posledično pa so izhodne moči laserskega snopa relativno majhne in znašajo od nekaj mW do nekaj kW. Po drugi strani lahko z uvedbo sunkovnega načina delovanja močno omejimo trajanje sunka in tako drastično povečamo vršno moč, ki lahko brez težav doseže nekaj TW (10^{12} W). Take ekstremne moči trajajo le izjemno kratek čas, kar poudarimo s poimenovanjem ultrakratki sunki. Izraz je bil prvič uporabljen leta 1982, ko so bili najkrajši tehnološko dosegljivi sunki dolgi nekaj femtosekund, medtem ko lahko danes brez večjih težav posegamo že globoko v atosekundno ($< 10^{-15}$ s) področje.

Kontinuirano delujoči laser lahko predelamo v improvizirani sunkovni laser že tako, da mu dodamo zunanji zaklop, ki selektivno prepušča vpadno svetlobo le v kratkih intervalih. Pri tem se porajata dve očitni pomanjkljivo-

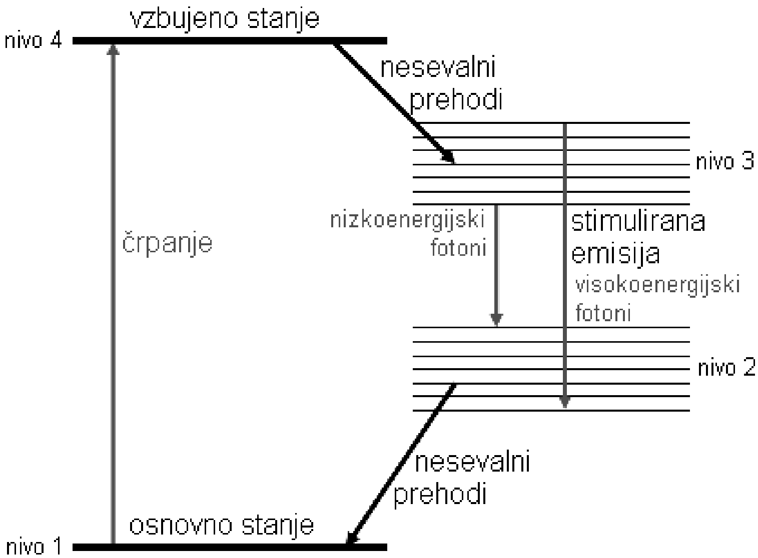


Slika 1. Shema zgradbe preprostega laserja.

sti, in sicer omejena hitrost mehanizma zaklopa, ki omejuje trajanje sunka, in omejenost maksimalne energije sunka, ki jo določa povprečna energija laserja. Za praktične potrebe zato potrebujemo učinkovitejšo metodo, ki naj poskrbi, da se energija laserja v intervalih med sunki ne izgublja, ampak shranjuje. Želimo, da se energija skladišči bodisi v obliki svetlobe, ujete znotraj resonatorja, bodisi kot povečana obrnjena zasedenost atomskega sistema. Pri ultrakratkih sunkih za dosego sunkovnega delovanja navadno uporabimo metodo faznega vklepanja laserskih nihanj.

Fazno vklepanje laserskih nihanj

Sunkovni laserji v nasprotju z zgoraj opisanimi kontinuirano delujočimi oddajajo svetlobo širokega spektra. Frekvenčne komponente, ki ustrezajo različnim lastnim frekvencam resonatorja, so med seboj neodvisne, zato se njihovo optično polje zaradi destruktivne interference praktično izniči. Če pa poskrbimo za primeren mehanizem, ki povzroči uskladitev faze različnih lastnih nihanj, se njihova optična polja konstruktivno seštejejo in tvorijo sunek z veliko izhodno močjo. Celotno število različnih resonatorskih nihanj, ki prispevajo k sunku, je določeno z intrinzičnimi lastnostmi ojačevalnega sredstva. Pri tem je bistvena porazdelitev atomskih nivojev, ki določajo spektralni razpon procesa optičnega ojačevanja. Zato pri izbiranju ojačevalnih sredstev za sunkovne laserje težimo k takim snovem, ki imajo čim več različnih atomskih prehodov, kar pomeni, da mora biti njihova nivojska

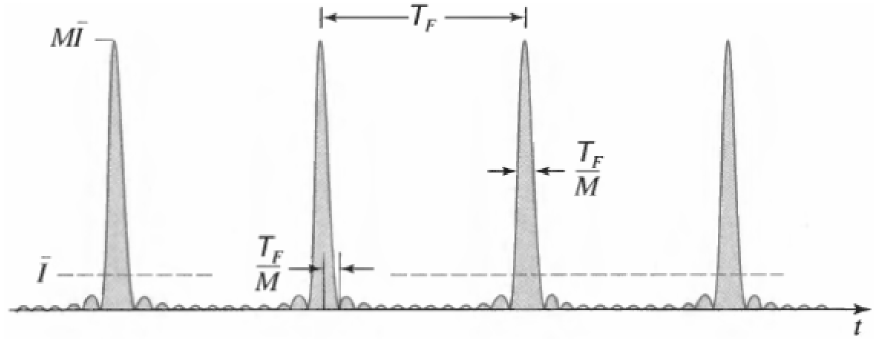


Slika 2. Primer štirinivojske atomske sheme ojačevalnega sredstva, primernega za uporabo v sunkovnem laserju. Optično ojačevanje poteka med nivoji iz skupine 3 in 2.

struktura močno razvejena (slika 2). Konstruktivno seštevanje delnih polj v želeni kratki sunek se običajno ne zgodi samodejno. Pomagamo si s faznim vklepanjem, ki poskrbi, da so faze različnih lastnih nihanj resonatorja med seboj enake. Oglejmo si, kako se v preprostem modelu Fabry-Perotovega resonatorja na ta način tvorijo kratki sunki [2]. Vsak lastni nihajni način lahko predstavimo v obliki ravnega valovanja, ki se propagira vzdolž osi resonatorja (ki jo označimo kot os z) s hitrostjo $c = c_0/n$. Potem lahko električno polje svetlobe v resonatorju v kompleksnem zapisu opišemo z vsoto:

$$E(z,t) = \sum_j A_j e^{i2\pi\nu_j(t-z/c)}, \qquad (2)$$

pri čemer je $\nu_j = \nu_0 + j\nu_F$ frekvenca j-tega nihajnega načina ($j = 0$, ± 1, ± 2 ...), $\nu_F = c/2L$ pa osnovna frekvenca resonatorja dolžine L. Predpostavimo tudi, da nihajni način $j = 0$ sovpada s centralno frekvenco atomskih prehodov med nivoji 3 in 2, ki jo označimo kot ν_0. Amplitude $|A_j|$ določimo na osnovi spektralnega profila odziva ojačevalnega sredstva in resonatorskih izgub, faze A_j pa so v splošnem zaradi svoje naključne narave statistično nekorelirane. Če izraz za frekvenco j-tega nihajnega načina ν_j postavimo v



Slika 3. Časovna odvisnost intenzitete izhodne laserske svetlobe pri vklenjenih fazah. Namesto kontinuiranega sevanja dobimo kratke laserske sunke [2].

izraz za električno polje, dobimo:

$$E(z,t) = \mathcal{A}(t - \frac{z}{c})e^{i2\pi\nu_0(t-z/c)}, \tag{3}$$

kjer smo vpeljali kompleksno ovojnico kot:

$$\mathcal{A}(\tilde{t}) = \sum_j A_j e^{i2\pi j\nu_F\tilde{t}}, \qquad \tilde{t} = t - \frac{z}{c}.$$

Vidimo, da je kompleksna ovojnica $\mathcal{A}(\tilde{t})$ periodična funkcija s periodo $T_F = 1/\nu_F$. Če torej izberemo amplitude in faze kompleksnih koeficientov A_j na pravi način, lahko $\mathcal{A}(\tilde{t})$ zavzame obliko ozkih periodičnih sunkov. To najlažje uvidimo tako, da si zamislimo M prispevkov z indeksi $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm S$, tako da velja $M = 2S+1$. Prispevki naj imajo enake vrednosti kompleksnih koeficientov $A_j = A_0$. V tem primeru lahko izraz za kompleksno ovojnico zapišemo kot:

$$\mathcal{A}(\tilde{t}) = A_0 \sum_{j=-S}^{S} e^{i2\pi j\nu_F\tilde{t}} = A_0 \frac{\sin(M\pi\tilde{t}/T_F)}{\sin(\pi\tilde{t}/T_F)}. \tag{4}$$

Intenziteto svetlobe izračunamo kot $I(\tilde{t}, z) \propto |\mathcal{A}(t - z/c)|^2$ in znaša:

$$I(\tilde{t}, z) \propto |A_0|^2 \frac{\sin^2(M\pi(t - z/c)/T_F)}{\sin^2(\pi(t - z/c)/T_F)}. \tag{5}$$

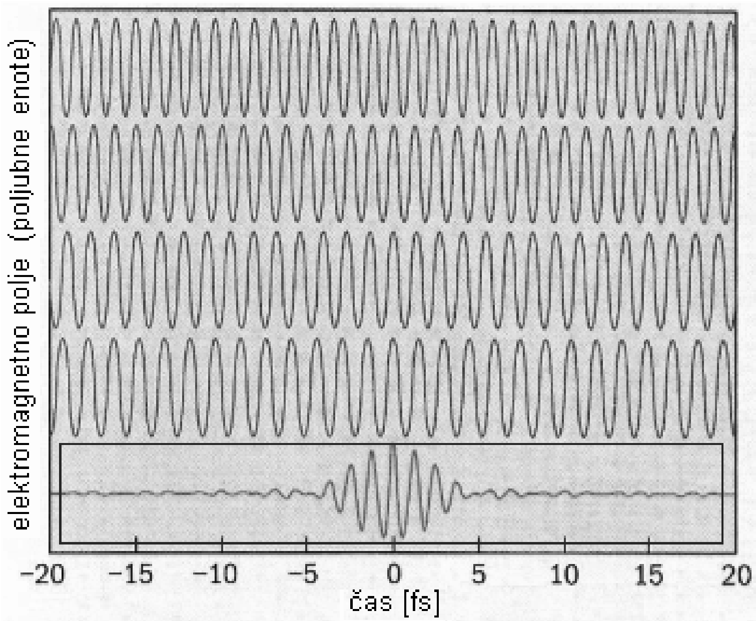
Dolžina laserskega sunka pri vklenjenih fazah je odvisna od števila nihajnih prispevkov M, ki je sorazmerno s širino pripadajoče atomske črte $\Delta\nu$. Če predpostavimo, da v grobem velja $M \approx \Delta\nu/\nu_F$, sledi, da je dolžina sunka τ določena kot $\tau = T_F/M \approx 1/\Delta\nu$. Ker so lahko vrednosti $\Delta\nu$ v nekaterih snoveh zelo velike, lahko posledično ustvarimo zelo kratke sunke (slika 3).

Na zgornji način opisano fazno sklopljeno elektromagnetno valovanje s svetlobno hitrostjo potuje med zrcaloma. Ko doseže delno prepustno zrcalo, del valovanja zapusti resonator in se manifestira kot kratek izhodni laserski sunek. Preostali del valovanja se odbije nazaj do neprepustnega zrcala ter nato spet potuje do delno prepustnega zrcala in tvori nov sunek. Dva zaporedna sunka sta torej časovno ločena ravno za preletni čas resonatorja, $T_F = 2L/c$.

V praksi lahko fazno vklepanje dosežemo na pasivni ali aktivni način. Pri aktivnem vklepanju faz uporabimo aktivne modulatorje svetlobe, na primer elektrooptične ali pa akustooptične modulatorje, pri pasivnem vklepanju faz pa za oblikovanje sunkov izkoriščamo pasivne nelinearne optične elemente. Pasivni način je pri pripravi ultrakratkih laserskih sunkov dosti bolj uporaben, saj omogoča doseganje krajših dolžin sunka kot aktivno vklepanje, ki je omejeno s hitrostjo odziva uporabljenih optičnih modulatorjev. Pri pasivnem vklepanju lahko na primer v resonatorsko votlino uvedemo t. i. saturacijski absorber – optično sredstvo, katerega prepustnost je močno odvisna od intenzitete vpadne svetlobe. Izberemo takega, ki absorbira svetlobo z nizko intenziteto, svetlobo z visoko intenziteto pa prepušča. V resonatorju se v začetku vzpostavi veliko število lastnih nihanj z različnimi frekvencami in fazami. Prej ali slej se zgodi, da pride do konstruktivne interference za določen delež lastnih nihanj, kar povzroči porast v intenziteti (slika 4). Ta začetni najvišji sunek (skupaj z mnogimi drugimi nižje intenzitete) potuje med resonatorskimi zrcali in prehaja skozi absorber. Pri tem se sunki nižje intenzitete absorbirajo, sunek najvišje intenzitete pa prepusti. Ker se proces mnogokrat ponovi, se najmočnejši sunek s časom močno ojača in skrajša, nizkointenzitetni „repi“ sunka in ozadje pa se zaradi selektivne absorpcije manjšajo. Tako po daljšem času dobimo en sam močan sunek, ki je posledica vklenjenih faz.

Ojačevalno sredstvo Ti:safir

Eno najbolj primernih ojačevalnih sredstev za sunkovne laserje je kristal safirja, dopiranega s titanovimi ioni (*Ti:safir*). Že leta 1981 je Peter Moulton s svojo ekipo na *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) predstavil ek-



Slika 4. Primer superpozicije štirih fazno vklenjenih valovanj. Zgornje štiri krivulje prikazujejo posamezna delna valovanja pri štirih različnih frekvencah, medtem ko spodnja (obrobljena) krivulja ponazarja njihovo superpozicijo [3].

speriment, s katerim je pokazal, da laser *Ti:safir* oddaja zelo širok spekter frekvenc, čeprav so za črpanje uporabili monokromatsko svetlobo kontinuiranega laserja [4]. Izkaže se, da pri črpanju z valovno dolžino $\lambda \sim 530$ nm kristal oddaja svetlobo v razponu 600 nm $< \lambda <$ 900 nm (od oranžne do infrardeče). V splošnem je s takim kristalom dosegljiv še širši spekter valovnih dolžin (odvisno od izbire črpalne frekvence), ki se razteza od 700 do 1050 nm. Z uporabo širokega spektra lahko brez kakršnih koli težav ustvarimo sunke dolžine $\tau \sim 10$ fs, z malce več truda pa lahko realiziramo tudi sunke, dolge le $\tau \sim 5$ fs. Ti ekstremno kratki sunki ustrezajo valovanju, ki zajema le nekaj nihajnih period, kar pomeni, da se bližajo teoretični absolutni meji. Maxwellove enačbe elektrodinamike namreč omejujejo dolžino najkrajšega sunka, ki se lahko generira, na nihajni čas ene periode valovanja. Krajši sunki so teoretično nemogoči, ker bi bili v nasprotju z oscilirajočo naravo rešitve Maxwellovih enačb in se kot taki ne bi mogli širiti v prostoru.

Ojačevanje na osnovi frekvenčne modulacije sunka

S faznim vklepanjem pa se zgodba ne konča, saj so femtosekundni sunki vidne svetlobe, ki trajajo le nekaj nihajnih period, odločno predolgi za veliko množico procesov, ki bi jih z laserji želeli podrobneje raziskati. Krajše sunke dobimo, če skrajšamo nihajni čas oziroma valovno dolžino. To dosežemo tako, da običajne femtosekundne sunke pošljemo skozi optično nelinearno sredstvo, v katerem nastane elektromagnetno valovanje pri višjih harmoničnih frekvencah. Izkaže se, da so konvencionalno pridobljeni femtosekundni sunki prešibki za takšno frekvenčno pomnoževanje, zato jih moramo najprej ojačati vsaj za faktor 100 oz. 1000. Ker pa lahko visoke moči poškodujejo ojačevalno sredstvo, običajno uporabimo tehniko ojačevanja na osnovi frekvenčne modulacije sunka (*chirped-pulse amplification – CPA*). Običajni laserski sunki so navadno že sami po sebi frekvenčno modulirani. Pri prehajanju svetlobe skozi optično ojačevalno sredstvo v laserju običajno pride do optičnega Kerrovega pojava (enačba 7) in fazne samo-modulacije. Lomni količnik ojačevalnega sredstva je namreč odvisen od intenzitete vpadne svetlobe, kar pomeni, da se različni deli laserskega sunka propagirajo z različnimi faznimi hitrostmi. Odvisnost lomnega količnika n od intenzitete I podaja enačba

$$n(I) = n_0 + n_2 I, \tag{6}$$

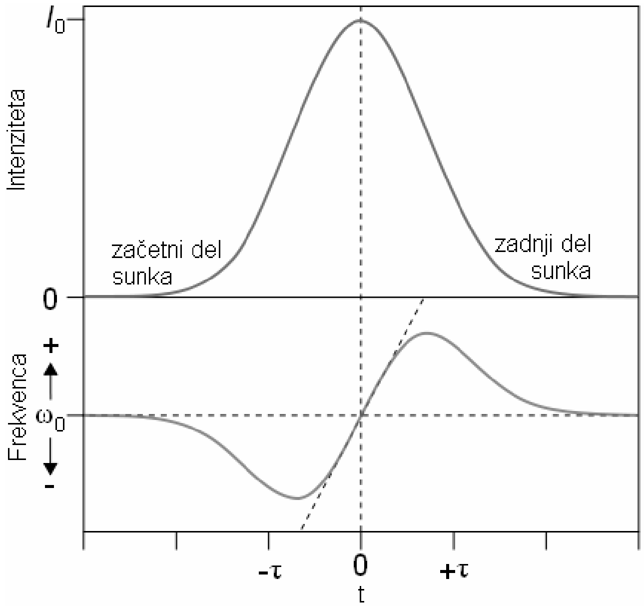
kjer n_0 pomeni običajni lomni količnik, n_2 pa nelinearni lomni količnik. Velikost nelinearnega lomnega količnika je odvisna od vrste uporabljenega sredstva ter znaša $10^{-16} - 10^{-14}$ cm^2/W v navadnih steklih, $10^{-14} - 10^{-7}$ cm^2/W v dopiranih steklih in $10^{-10} - 10^{-2}$ cm^2/W v polprevodnikih [2]. Fazo propagirajočega elektromagnetnega valovanja zapišemo kot:

$$\phi(t) = \omega_0 t - kz = \omega_0 t - k_0 z[n_0 + n_2 I]. \tag{7}$$

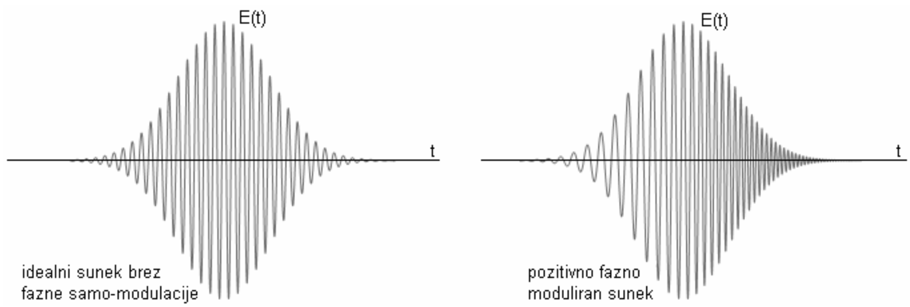
Pri tem uvedemo oznako za frekvenco idealnega laserskega sunka ω_0 ter oznako za pripadajoči valovni vektor $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$. Efektivno frekvenco laserskega sunka izračunamo po definiciji $\omega(t) = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$ in dobimo (slika 5):

$$\omega(t) = \omega_0 - k_0 z n_2 \frac{\partial I(t)}{\partial t}. \tag{8}$$

Vidimo, da prisotnost Kerrovega pojava spremeni efektivno frekvenco laserskega sunka, ki je bila pred vstopom v optično sredstvo konstantna (slika 6); po prehodu skozi sredstvo se frekvenca v začetnem delu sunka efektivno

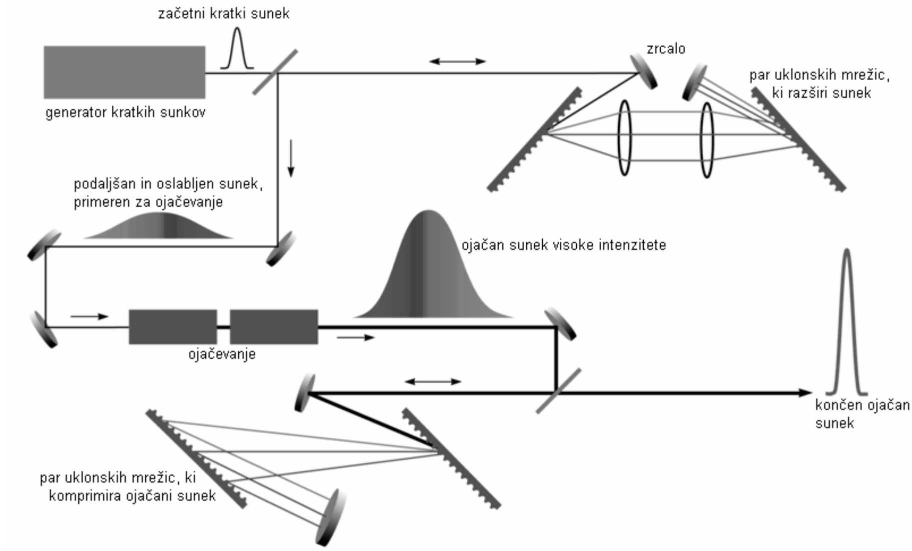


Slika 5. Shema spremembe frekvence idealnega laserskega sunka ω_0 zaradi pojava fazne samomodulacije [5].



Slika 6. Sprememba frekvenčne odvisnosti idealnega laserskega sunka (levo) ob prisotnosti Kerrovega pojava (desno).

zmanjša, v zadnjem delu sunka pa poveča. V osrednjem območju se frekvenca s časom spreminja linearno, kar povzroči linearno zgoščevanje oscilacij v laserskem sunku. Pravimo, da je laserski sunek pozitivno frekvenčno moduliran. Pri tehniki *CPA* laserski sunek pred nadaljnjim ojačevanjem najprej usmerimo na par uklonskih mrežic oziroma na katerikoli drug optični element z disperzijo, kar povzroči, da se frekvenčne komponente v snopu



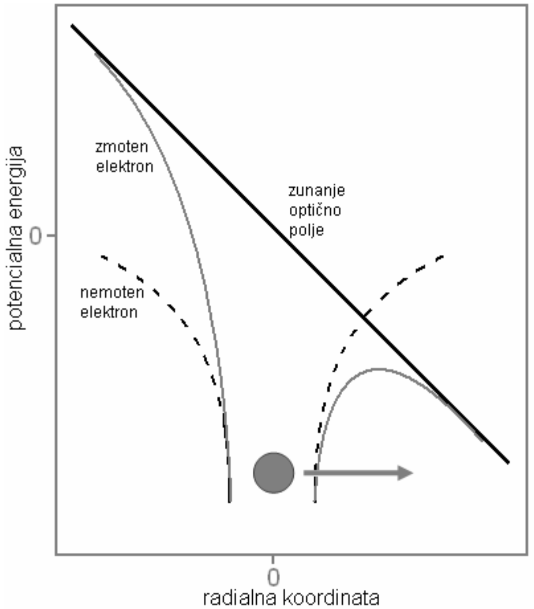
Slika 7. Shema ojačevanja na osnovi fazne modulacije sunka [6].

prostorsko razklenejo (slika 7). Optične elemente postavimo tako, da imajo nizkofrekvenčne komponente, ki so na čelu sunka, zaradi disperzije krajšo pot skozi optični sistem kot pa visokofrekvenčne komponente, zaradi česar se slednje še dodatno časovno zakasnijo. Laserski sunek se pri tem lahko podaljša za faktor 10^5 in več. Intenziteta takega sunka je sedaj zmanjšana bistveno pod prag za poškodbe in sunek lahko varno usmerimo v ojačevalno sredstvo. Tam se svetloba nato ojača za več redov velikosti in po izstopu pade na komplementarni sistem mrežic, ki različne frekvenčne komponente po podobnem načelu, kot je opisano zgoraj, ponovno združi skupaj v kratek sunek.

Tehnike *CPA* pa ne uporabljamo le pri zmernem ojačevanju pri ustvarjanju ultrakratkih sunkov, ampak je pomembno orodje tudi pri doseganju laserskih sunkov z izjemno visokimi močmi. Pri slednjem so še posebej problematični nelinearni procesi v ojačevalnem sredstvu (npr. samofokusiranje), ki lahko uničijo ojačevalno sredstvo, če se ojačevanja lotimo brez predhodne razširitve sunka. Hitro se lahko zgodi tudi, da intenziteta laserskega snopa preseže mejo 700 GW/cm^2, kar povzroči tvorbo plazme v zraku oziroma v ojačevalnem sredstvu in tako močno spremeni uklonske lastnosti snopa. Omenjene meje torej med ojačevanjem ne smemo preseči.

Na izhodu iz ojačevalnika imamo sedaj na voljo primerno ojačan sunek, ki ga lahko pošljemo v nelinearno optično sredstvo, s pomočjo katerega se generira svetloba s krajšo valovno dolžino. Za primer spet vzemimo laser *Ti:safir* s centralno valovno dolžino 750 nm (bližnja infrardeča svetloba). Najkrajši sunki, ki jih tak laser lahko tvori, imajo dolžino ene periode in trajajo 2.5 fs. Nadaljnje krajšanje torej zahteva precej višje frekvence, ki morajo segati daleč v ultravijolično področje. Za doseganje sunkov, krajših od 100 as, tako potrebujemo svetlobo iz skrajno ultravijoličnega območja spektra s tipičnimi valovnimi dolžinami okoli 12 nm [3].

Za generiranje svetlobe krajših valovnih dolžin uporabimo nelinearne pojave v snovi. Valovno dolžino lahko na primer skrajšamo za polovico, če podvojimo frekvenco, kar imenujemo frekvenčno podvajanje svetlobe. Pretvorbe v višje harmonične frekvence dosežemo z uporabo višjih redov nelinearnosti. Pri tem gre v grobem za pojav, v katerem se n nizkoenergijskih fotonov z energijo $\hbar\omega$ pretvori v en visokoenergijski foton z energijo $n\hbar\omega$. Podrobna razlaga teorije ustvarjanja višjih harmonikov je precej zapletena, zato na tem mestu povzemamo sipalni model P. Corkuma [7]. Zamislimo si laserski sunek visoke intenzitete, ki ga usmerimo v inertni plin. Elektroni atomov plina so zaradi odsotnosti električnega polja laserskega sunka v minimumu pripadajočega atomskega potenciala (slika 8 – črna prekinjena črta). Ko na plin posvetimo z lasersko svetlobo, na elektrone deluje dodatno optično električno polje laserja (slika 8 – črna polna črta), zaradi česar elektroni čutijo spremenjen potencial (slika 8 – siva polna črta). Pri tem pride do dveh bistvenih sprememb: na levi strani jame se potencial v primerjavi z neperturbiranim stanjem zviša, na desni pa zniža in tako tvori potencialno bariero, skozi katero lahko elektron z določeno verjetnostjo tunelira. Prisotnost optičnega električnega polja torej povzroči ionizacijo, po kateri se pobegli elektron še dodatno pospešeno oddaljuje od matičnega atoma. Ker je električno polje laserske svetlobe izmenično, se njegova smer po polovici periode obrne in isti elektron se začne pospešeno vračati proti matičnemu atomu. Ko elektron doseže matični atom, pride do rekombinacije, pri tem pa se v obliki fotona sprosti energija, enaka kinetični energiji, ki jo je elektron nabral med pospeševanjem. Proces se v splošnem dogaja na mnogo elektronih hkrati, zato so njihove kinetične energije široko porazdeljene. To pomeni, da imajo tudi oddani fotoni zelo različne energije in namesto običajnega dis-



Slika 8. Potencial elektrona (siva krogla) v notranjosti matičnega atoma pred (prekinjena črta) in po (siva polna črta) vključitvi optičnega električnega polja (črna polna črta). Električno polje svetlobe povzroči, da elektron tunelira skozi potencialno bariero in zapusti matični atom.

kretnega sevalnega spektra dobimo zvezni spekter visokoenergijskih fotonov na območju ultravijolične svetlobe. Nezaželeni del spektra nato izločimo z uporabo ustreznih filtrov.

Na osnovi opisanega pojava lahko torej vpadni laserski sunek določene frekvence pretvorimo v sunek veliko višje frekvence. Z uporabo primernega plina in ob ustrezno izbranih pogojih lahko brez težav dosežemo 100- in večkratno frekvenčno pomnoževanje, kar je dovolj, da svetlobo iz bližnjega infrardečega spektra premaknemo v ultravijolično področje. Najkrajši sunki, ki jih lahko danes na tak način ustvarimo z uporabo laserja *Ti:safir*, so dolgi $\tau \approx 80$ as (1 as $= 10^{-18}$ s).

Obeti za prihodnost

V prihodnosti si obetamo velik napredek na področju nadaljnjega krajšanja sunkov in zmanjševanja segrevanja laserskega sistema, kar bi omogočilo veliko hitrejše frekvence ponavljanja sunkov in širšo uporabo ultrakratkih sistemov v praksi. Za te namene lahko uporabimo optično parametrično ojačevanje (*OPA – optical parametric amplification*), ki izkorišča nelinearne pojave v kristalih in omogoča pretvorbo monokromatske svetlobe v svetlobo širokega spektra (kot je to mogoče v kristalu *Ti:safir*). Drugače od ojačevalnih sistemov na osnovi stimulirane emisije se med parametričnim ojačevanjem svetloba praktično ne absorbira, zaradi česar je tudi segrevanje ojačevalnega sredstva manjše. Hkrati lahko tako dosežemo večje spektralne širine, kar že samo z uporabo metode vklepanja faz vodi do zelo kratkih sunkov. Morda najboljša lastnost parametričnega ojačevanja pa je možnost ustvarjanja svetlobe z zelo kratkimi valovnimi dolžinami pri frekvenčnem pomnoževanju. S pomočjo parametričnega ojačevanja lahko namreč ustvarimo laserske sunke različnih valovnih dolžin, s katerimi vstopamo v proces generiranja višjih harmonikov, pri čemer si na začetku želimo sunke čimdaljših valovnih dolžin. Energija fotonov, ki nastanejo kot posledica nelinearnega odziva, je namreč direktno odvisna od kinetične energije elektronov, ki se pospešujejo v optičnem električnem polju. Daljša kot je perioda električnega polja (torej daljša kot je valovna dolžina vstopnega sunka), več časa se elektron lahko pospešuje in tako nakopiči več energije. Na ta način postanejo z generacijo višjih harmonikov dosegljive tudi valovne dolžine mehkih rentgenskih žarkov ($\lambda \sim 1$ nm). S kombinirano uporabo parametričnega ojačevanja in drugih tehnik raziskovalci pričakujejo, da bodo kmalu lahko ustvarili sunkovne laserske sisteme, ki bodo segali že v zeptosekundno ($\tau < 10^{-18}$ s) področje.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Petdesetletnica laserjev*, Obzornik mat. fiz. **57** (2010), 97–106.

[2] B. Saleh et al., *Fundamentals of Photonics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New Jersey (2007).

[3] A. Cavalieri, *Beyond ultrafast*, Physics World **23**, 47–51 (2010).

[4] P. F. Moulton, *Spectroscopic and laser characteristics of* $Ti : Al_2O_3$, J. Opt. Soc. Am. B **3**, 125–133 (1986).

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/Self-phase_modulation` (ogled 10. 12. 2010).

[6] `http://en.wikipedia.org/wiki/Chirped_pulse_amplification` (ogled 10. 12. 2010).

[7] P. B. Corkum, *Plasma Perspective on Strong-Field Multiphoton Ionization*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1994–1997 (1993).

POSVET O POUKU FIZIKE, KEMIJE IN MATEMATIKE NA SLOVENSKI AKADEMIJI ZNANOSTI IN UMETNOSTI

MOJCA ČEPIČ

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Slovenska akademija znanosti in umetnosti je v sredo, 22. septembra 2010, organizirala drugega v seriji posvetov, namenjenih poučevanju različnih področij. Tokrat so se predavatelji in razpravljavci posvetili poučevanju treh predmetov: fizike, kemije in matematike, če jih naštejemo po abecedi.

Po uvodnem nagovoru akad. prof. dr. Jožeta Trontlja so se predavatelji posvetili prvemu sklopu, ki se je ukvarjal s Kvaliteto pouka in ga je povezoval akad. prof. dr. Franc Forstnerič s Fakultete za matematiko in fiziko UL (FMF). Prof. dr. Mojca Čepič s Pedagoške fakultete UL je predstavila pomen fizikalnih vsebin za vsakdanje življenje, doc. dr. Damjan Kobal s FMF je razpravljal o pogojih za kvalitetnega učitelja matematike in prof. Alenka Mozer z gimnazije Vič je predstavila nov inovativni pristop pri poučevanju naravoslovnih predmetov. Naslednji sklop, ki se je ukvarjal z izobraževanjem učiteljev, je povezovala prof. dr. Nataša Vaupotič, sicer dekanica Fakultete za naravoslovje in matematiko UM (FNM). Prof. dr. Nataša Bukovec s Fakultete za kemijo in kemijsko tehnologijo UL (FKKT) je predstavila predlog stalnega strokovnega izpopolnjevanja, namenjenega seznanjanju učiteljev s strokovnimi in didaktičnimi novostmi, prof. dr. Gorazd Planinšič s FMF je opozoril na težave, s katerimi se srečuje učitelj, in težave, s katerimi se srečuje izobraževanje učiteljev fizike. Prof. dr. Matej Brešar s FMF in FNM je razložil obstoječo shemo izobraževanja učiteljev matematike in poudaril, da je dobra. Zadnji sklop, v katerem so se oglasili uporabniki in izvajalci s svojimi stališči, je vodila prof. dr. Nataša Bukovec s FKKT. Prof. Marta Zabret s Šolskega centra Rudolfa Maistra je koncizno, a vendar humorno predstavila še druge probleme, povezane z nemotiviranostjo učencev in nekritično podporo staršev, s katerimi s srečujejo učitelji, v njenem primeru matematike. Prof. dr. Marija Bešter Rogač s FKKT je predstavila pogled strokovnjaka, a hkrati tudi starša, na zmešnjavo, ki jo je mogoče zaslediti v učbenikih. Nazadnje sta na probleme pouka fizike v gimnazijah, predvsem na zelo veliko raznolikost v sposobnostih in motiviranosti učencev na marsikateri gimnaziji, opozorila mag. prof. Vitomir Babič s Šolskega centra Lava v Celju in na probleme pri pouku fizike na osnovnih šolah, še posebej na zelo nizko priznane potrebe po laborantih, prof. Meta Trček z osnovne šole Ivana Cankarja na Vrhniki.

V zadnjem delu sta se posvetu pridružila prof. dr. Igor Lukšič, minister za šolstvo in šport, ter v. d. direktorja Direktorata za visoko šolstvo dr. Stojan Sorčan. Moderatorji posameznih sklopov so gostoma predstavili problematiko, obravnavano v posameznih sklopih, akademik prof. dr. Franc Forstnerič pa je gostoma predstavil tudi predloge sklepov. Uresničeni predlogi bi lahko vodili do učinkovitega izboljšanja kvalitete pouka in učenja naravoslovno-matematičnih predmetov, vendar je za njihovo uresničevanje nujno potrebna institucionalna podpora Ministrstva za šolstvo in Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo, svoje pa bi morale prispevati tudi univerze. Nekaj besed sta povedala tudi oba gosta. Minister prof. dr. Igor Lukšič je omenil, da je šolstvo zelo krhek sistem in lahko dobro mišljeni ukrepi, kot npr. povečevanje učenčevih pravic, vodijo do negativnih posledic, ki niso bile predvidljive. Prav tako je omenil, da imajo lahko premiki v obsegih predmetov dolgoročne posledica za obstoj študijskih programov. Dr. Stojan Sorčan je pojasnil nekatere dejavnosti ministrstva v zvezi z raziskavami, žal pa se v svojem govoru ni dotaknil problemov, ki so jih izpostavljali sklepi in jih lahko pomaga reševati le Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo. Posvet se je nadaljeval v konstruktivni debati prisotnih, rezultat posveta pa so v nadaljevanju navedeni predlogi izboljšav. Prispevki predavateljev bodo izdani kot posebna publikacija, ki je že pripravljena za tisk. Na voljo naj bi bili tudi na spletni strani SAZU.

Predlog skupnih sklepov

Preambula

Učenje in razvoj sta možna le v pregledno strukturiranem svetu vrednot in odgovornosti. Slednje dokazujejo tudi številne resne znanstvene raziskave (predvsem s področja nevropsihologije). Šolo, ki uči odgovornosti, vztrajnosti, trdega dela ter razumevanja, in ne šole, ki temelji na kratkoročnih ambicijah napredovanja, zahtevajo tudi odgovorni starši in vizija razvoja družbe. Prav kvaliteten pouk znanosti, od osnovne prek srednje in do visokih šol, je pri tem ključen. Realizacijo take šole, od katere smo trenutno zelo oddaljeni, lahko zagotovijo predvsem kvalitetni učitelji. Zagotovitev najboljših učiteljev in kvalitetnega pouka, ki lahko temelji na osebni odgovornosti in ne na formalizirani kvaliteti, bi morala biti nacionalna prioriteta. Vzporedno z zavračanjem permisivne vzgoje je nujno ustvariti ozračje, v katerem poglobljeno delo v šoli ne bo več pomenilo nepotrebnega napora, pač pa možnost za vznemirljiva doživetja in dragoceno popotnico za uspešno in bogato življenje.

Predlogi za doseganje zgoraj navedenega:

Kaj velja obdržati

- Naravoslovni predmeti in matematika ponujajo osnovna znanja, ki jih mora imeti vsak izobraženec. **Ti predmeti sodijo v nujno splošno izobrazbo.** Njihov razvoj, vpeljava novih vsebin in znanstvenih spoznanj mora **potekati postopoma in med predmeti enakovredno.** Podpora razvoju le enega predmeta bi pomenila škodo za celotno naravoslovno-matematično izobraževanje. Pomembne so tudi medpredmetne povezave.

- Naravoslovje temelji na eksperimentalnem delu, zato moramo ohraniti obstoječe standarde laboratorijskega dela.

- Vsak predmet pokriva svoje specifike, zato zahteva strokovno izobraženega učitelja. Sedanji način izobraževanja, kjer na **gimnazijskih programih** z bolj poglobljeno vsebino izobražujejo **enopredmetni učitelji**, na **osnovnih in strokovnih šolah** pa dvopredmetni učitelji, ki so predmetno področje študirali v času svojega dodiplomskega študija, se je pokazal za **uspešnega** in ga je treba **obdržati**.

Predlogi Ministrstvu za šolstvo in šport

- Za **dvig kvalitete** bodočih učiteljev naravoslovno-matematičnih predmetov je nujno treba zagotoviti **sistem kadrovskih štipendij**. Kadrovske štipendije bi morale biti namenjene **najboljšim** na področjih, kjer je učiteljev preveč, ter imeti še dodatno stimulativno vlogo za **načrtovanje kadrov na področjih**, kjer je učiteljev sicer trenutno dovolj, a vpisna situacija nedvoumno nakazuje, da bo **čez deset let pomanjkanje.**

- Za **stimulacijo vpisa** na te smeri, pa tudi stimulacijo splošne naravoslovne ozaveščenosti, je treba omogočiti **dve ravni mature** za naravoslovne predmete in uvesti **obvezni** izbirni maturitetni predmet iz nabora **naravoslovno-tehničnih predmetov**.

- Zagotoviti **dvig kvalitete** aktivnih učiteljev naravoslovno-matematičnih predmetov z obveznimi **izobraževanji**, ki omogočajo spoznavanje novih znanstvenih dosežkov in didaktičnih pristopov na učiteljevem strokovnem področju. Podobne zahteve imajo tudi drugi regulirani poklici. Obvezna izobraževanja naj postanejo del redne delovne obremenitve, npr. z uro pouka manj tedensko.

- Vzpostavi naj se **kvaliteten sistem svetovanja** učiteljem pri njihovem delu in strokovnem razvoju.

- Poiskati mehanizme za razvijanje **odgovornosti učencev za svoje znanje**, za razvijanje pripadnosti učencev in dijakov učeči se skupnosti in za medsebojno spoštovanje udeležencev v učnem procesu.

- Ustanoviti je treba **recenzentske skupine** za posamezna področja, ki bodo skrbele **za strokovni pregled** vseh učnih gradiv, tako učbenikov kot delovnih zvezkov, priročnikov, e-gradiv in drugih pripomočkov z vidika ožje strokovne in didaktične ustreznosti. Iskanje recenzentov ne sme biti v domeni založnikov.

- Vzpostaviti mehanizme povratnih informacij o dobrih (in slabih) učiteljih in tudi sistem povratnih informacij o njihovi kvaliteti dela učiteljem. Povečati težo kvalitetnega dela v razredu pri napredovanjih.

Predlogi Ministrstvu za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo

- Zavedati se moramo, da je **izobraževanje učiteljev** naravoslovnih predmetov in matematike **finančno enako zahtevno kot študijski programi istih strok**, zato je treba vpeljati **enako financiranje tudi za pedagoške smeri** strok.

Predlogi Ministrstvu za šolstvo in šport ter Ministrstvu za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo

- Poklic učitelja je za državo ključnega pomena. Morebitnega pomanjkanja kadrov ni mogoče nadomeščati z učitelji, ki nimajo ustreznih strokovnih predmetnih znanj in jih tudi ni mogoče uvažati, ker poteka pouk v slovenščini. Zato je treba vpeljati poklic učitelja kot **reguliran poklic** z ustreznim varovanjem študijskih programov, ki učitelje izobražujejo.
- V izobraževalnih programih postaviti kriterije za doseganje visokih standardov znanja pred množičnost, da se ustavi inflacija podeljevanja odličnih ocen, spričeval, diplom. . .
- Organizirati **centre** (npr. v okviru fakultet, kjer potekajo izobraževanja učiteljev), ki bi dajali učiteljem dodatno **podporo z znanjem in opremo** ter posledično povečali motivacijo za naravoslovno-tehniške študije.
- Zagotoviti **podporo institucijam neformalnega izobraževanja**, ki s svojim delom in dosežki na področju posredovanja naravoslovja in matematike široki javnosti že izkazujejo odličnost in s tem prispevajo k pojmovanju znanja kot pomembne osebne vrline in družbene vrednote.

Predlog univerzam

- Univerzitetni učitelji, ki poučujejo specialne didaktike, se morajo s tem specialnodidaktičnim področjem tudi aktivno raziskovalno ukvarjati in to dokazovati s svojo (mednarodno odmevno) bibliografijo v habilitacijskih postopkih, kot to velja za vsa habilitacijska področja.

VESTI

Sedemnajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Kot že mnogo let poprej se je tudi v letu 2010 ekipa Fakultete za matematiko in fiziko, Univerze v Ljubljani udeležila mednarodnega tekmovanja študentov matematike. Tokrat so se s študenti z vsega sveta pomerili Urban Jezernik iz tretjega letnika ter Špela Špenko, David Gajser in Gašper Zadnik iz četrtega letnika. Kot zadnjih nekaj let se nam je pridružil še predstavnik Univerze na Primorskem, študent tretjega letnika Peter Muršič.

Tekmovanje ni imuno za zunanje dogodke, tako se je letos število sodelujočih študentov prvič v zgodovini tekmovanja zmanjšalo glede na prejšnje leto. Razloga naj bi bila predvsem dva: nekaterim ekipam ni uspelo zbrati denarja za udeležbo (bojda je kriva tudi recesija), nekatere ekipe pa so imele težave s pridobivanjem viz za Bolgarijo. Ta je že nekaj let del skupnosti držav, ki se zavzemajo za družbo znanja ter za splošno odprtost do drugih kultur. Tako je seveda povsem logično, da so študentom matematike iz Nigerije zavrnili prošnjo za vizo in ti niso mogli sodelovati. Kljub temu se je pomerilo več kot 300 študentov, kar je med drugim nemajhen organizacijski zalogaj. Lokalni organizatorji iz Blagoevgrada so ga izpeljali dovolj dobro, da bodo gostili tekmovanje tudi v letu 2011.

Naša ekipa je dosegla enega večjih uspehov zadnjih let. Špela Špenko, Urban Jezernik in Gašper Zadnik so osvojili drugo, David Gajser pa tretjo nagrado. Tudi Peter Muršič je osvojil priznanje. Glede na to, da mnoge univerze organizirajo posebne priprave ter izbore tekmovalcev (mi pa ne), ta uspeh ni zanemarljiv. V posebnem točkovanju univerz smo dosegli sicer zelo dobro 27. mesto med 90 univerzami.

Tudi družabni del ni zaostajal za prejšnjimi leti. Na nogometni tekmi med Srbijo in Iranom so morali posredovati celo lokalni gasilci. Hujšega ni bilo, le nekaj vej so zakurili (morda igralci sami, verjetno zaradi vzdušja). A sredi poletja v Bolgariji večinoma vlada suša, zato tako početje ni ravno zaželeno.

V študentskem domu je bilo vseskozi veselo, še posebej pa po drugem tekmovalnem dnevu, ko je bilo delo opravljeno. Ena od posledic celonočne zabave je bila ta, da se je izleta prihodnjega dne udeležilo nekoliko manj študentov. Naša ekipa je poslala enega predstavnika, kar je bilo bolje od naših sosedov v študentskem domu, ekipe iz Innsbrucka, ki so se odpravili na avtobus pet ur po njegovem odhodu.

Ob vrnitvi domov naših študentov sicer ni pričakala navdušena množica, so pa vseeno dobili priznanja, ki jim gredo. Najprej jih je v septembru

sprejel rektor Univerze v Ljubljani prof. dr. Stanislav Pejovnik. V decembru so bili povabljeni še na srečanje z ministrom Gregorjem Golobičem in predsednikom republike dr. Danilom Türkom. Obširnejša poročila z obeh dogodkov najdete na internetnih straneh Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, Urada predsednika republike in Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo.

Še nekaj besed o matematični plati tekmovanja. Študenti so dva dni po pet ur reševali po pet nalog. Vsak dan je bila prva naloga lahka in bi jo morali rešiti res skoraj vsi, naslednje tri naj bi bile srednje težavnosti, zadnja pa je bila običajno zelo težka oziroma nerešljiva. Predstavil bi dve (res lahki) nalogi ter nekaj dilem, pred katerimi so se znašli ocenjevalci. Problemi pri ocenjevanju izdelkov študentov so namreč pogosto, milo rečeno, nemajhni. Poleg tega ocenjevanje po pravilu traja dolgo v noč, ko tudi koncentracija ocenjevalcev že popusti. Tako je nujno, da obstaja možnost popravkov. Kljub temu se včasih zgodi, da je kak študent oškodovan za kakšno točko – kar lahko pomeni tudi nižjo nagrado (seveda moralno, saj materialnih nagrad skoraj ni).

Poskusimo najprej rešiti najlažjo nalogo.

Naloga 1. Dokažite, da za vsak par $0 < a < b$ velja

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2} .$$

Ker je naloga res lahka, bi jo zmogel rešiti vsak. Uradna rešitev je uporabila Cauchyjev izrek o povprečni vrednosti, nekaj odvajanja in neenakost med aritmetično in geometrično sredino. Kot običajno so študenti našli precej lažjo rešitev.

Rešitev. Ker je $x^2+1 \geq 2x$, je

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geq \int_a^b 2xe^{-x^2}dx = \Big[-e^{-x^2}\Big]_a^b = e^{-a^2} - e^{-b^2} .$$

Filozofski problem, okoli katerega so se vrteli ocenjevalci, je naslednji: ali lahko neenakost $x^2+1 \geq 2x$ zapišemo kot dejstvo? Študenti, ki so jo zapisali, bi jo verjetno znali tudi utemeljiti. A princip, po katerem se ocenjuje izdelke, je seveda ta, da se oceni tisto, kar je na papirju, ne pa tisto, kar je (najverjetneje) v študentovi glavi. Tega se zavedajo tudi nekateri študenti, zato so zgoraj omenjeno neenakost poskusili dokazati res podrobno. Eden izmed dokazov je bil recimo tale:

Dokaz neenakosti. Neenakost očitno velja za $x \geq 2$, saj v tem primeru velja že $x \cdot x \geq 2 \cdot x$. Če je $x \leq \frac{1}{2}$, je $2x \leq 1$ in neenakost spet velja. Ostane območje $\frac{1}{2} < x < 2$. Najprej pogledamo območje $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Tu velja, da je odvod leve strani enak $2x \leq 2$, odvod desne strani pa je enak 2. To pomeni, da funkcija x^2+1 počasneje narašča od $2x$. Ker je v desnem robu intervala (v $x = 1$) vrednost obeh funkcij enaka, velja, da je leva funkcija nad desno, torej $x^2+1 \geq 2x$. Podobno razmislimo na intervalu $[1, 2]$: odvod leve funkcije je $2x \geq 2$, odvod desne je še vedno enak 2. Tako smo dobili, da za vse realne x velja $x^2+1 \geq 2x$.

Ni presenečenje, da je bila pri ocenjevalcih bolje sprejeta naslednja argumentacija: ker je $x^2+1-2x = (x-1)^2 \geq 0$, je $x^2+1 \geq 2x$.

Podobne probleme (branje misli) smo imeli pri naslednji nalogi. Tudi ta je bila lahka.

Naloga 2. Ali za vsak začetni člen x_0 konvergira zaporedje, podano rekurzivno za vsak $n \geq 0$ s predpisom

(a) $x_{n+1} = x_n \cos x_n$?

(b) $x_{n+1} = x_n \sin x_n$?

Rešitev. Zaporedje $x_0 = \pi$, $x_{n+1} = x_n \cos x_n$ ne konvergira. Velja namreč, da je $x_n = (-1)^n \pi$.

Za drugo zaporedje je odgovor pritrdilen, kar najlažje vidimo tako: funkcija $f(x) = x \sin x$ je soda, kar med drugim pomeni, da je $f(x) = f(-x) = f(|x|)$. Poleg tega je zaporedje $|x_n|$ nenaraščajoče in seveda navzdol omejeno, torej ima limito. A ker je $x_{n+1} = f(x_n) = f(|x_n|)$ in je f tudi zvezna, $|x_n|$ pa je konvergentno, je tudi x_n konvergentno zaporedje.

Mimogrede: nenaraščajoče zaporedje je nekaj drugega kot zaporedje, ki ne narašča. Tudi tu je bilo kar nekaj vročih mnenj v komisiji. Večinoma smo se le domenili, da moramo nekaj tolerance pustiti tudi zaradi uporabe tujega jezika – tekmuje se namreč v angleščini, ki ni materni jezik večine tekmovalcev (celo tistih ne, ki prihajajo iz Londona ali Princetona).

Kogar zanimajo še druge naloge (ki so večji izziv), si jih lahko ogleda na uradni strani tekmovanja, www.imc-math.org.uk.

Gregor Šega

PETER ŠEMRL GLAVNI UREDNIK REVIJE LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS

Z novim letom je prof. dr. Peter Šemrl postal eden od štirih glavnih urednikov ugledne revije Linear Algebra and its Applications. V tej reviji je mnogo objavljal sam, pa tudi drugi slovenski matematiki. To veliko priznanje ne preseneča, če poznamo njegovo izredno uspešno znanstveno in tudi uredniško delo. Že prej je bil namreč urednik pri tej reviji. Profesor Šemrl je urednik tudi pri reviji Linear and Multilinear algebra.

Profesor Šemrl ves čas deluje v International Linear Algebra Society (ILAS). Bil je plenarni predavatelj na Deveti konferenci ILAS v Haifi (Izrael, 2001) in na Trinajsti konferenci ILAS v Amsterdamu (2006). Imel je Taussky Todd Lecture (kar je redko podeljeno priznanje) na Enajsti konferenci ILAS v Coimbri (Portugalska, 2004). Bil je član programskega odbora Štirinajste konference ILAS v Šanghaju (2007).

Peter Legiša

MARS 2010

Lansko leto med 15. in 20. avgustom je potekal že peti MARS – matematično raziskovalno srečanje srednješolcev. Po štirih letih na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije v Kopru se je MARS lani preselil v Bohinj, v Center šolskih in obšolskih dejavnosti. Njegovo poslanstvo pa ostaja nespremenjeno – dijakom želi približati raziskovanje matematike s čim širšim pogledom na obravnavane probleme. Tokrat smo enaindvajsetim dijakom, ki so se nam pridružili, za raziskovanje ponudili precej raznolike teme, od računalniško obarvanih (Regularni jeziki in končni avtomati, Problem trdnih zakonov, GPS), uporabnih (Diskontiranje, Vozli), diskretnih (Rado graf, Šifra: MARS) pa do že prav resne analize (Riemannova zeta funkcija in Eulerjev produkt). Mimogrede so se naučili rokovanja z urejevalnikom matematičnih besedil LaTeX in programom za dinamično geometrijo – geogebro. Ob strani smo jim stali Boštjan Kuzman s Pedagoške fakultete v Ljubljani, David Gajser (taborovodja), Uroš Kuzman, Nino Bašić, Maja Alif, Aleksander Simonič, Dejan Širaj in Gašper Zadnik s Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani ter Anja Komatar, študentka matematike na Cambridgeu.

Prve štiri večere bivanja na MARSu so nam obzorja širili tudi gostujoči predavatelji, asist. dr. Marjan Jerman (Zgodovina reševanja polinomskih enačb), doc. dr. Barbara Boldin (Matematični modeli v biologiji), prof.

dr. Neža Mramor – Kosta (Triangulacije: kako iz množice točk sestaviti obliko?) ter doc. dr. Marko Slapar (Štetje praštevil in Riemannova hipoteza).

Dejan Širaj je pripravil triurno delavnico na temo teorije iger, na kateri je predstavil nekaj preprostih iger za dva igralca ter zmagovalne strategije, ki smo jih tudi preizkusili. Nakazal je tudi pomen tega področja v finančni matematiki.

Da pa se dijaki sredi poletja vendarle ne bi le učili in raziskovali, smo poskrbeli za družabni program. Uradni del MARSa se je začel z vzletom, njegov namen je, da se dijaki in mentorji na zabaven način spoznajo. Vsak dan smo si vzeli krajši odmor ali dva za kakšno športno aktivnost in za krepitev moštvenega duha, zvečer pa smo se posvetili igranju družabnih iger ali namiznega tenisa. Predzadnji dan so dijaki končali svoje raziskovalno delo, po kosilu pa so se podali na veliko MARSovsko avanturo, ki je letos zahtevala kar nekaj spretnosti in veščin preživetja v naravi. Prav vsi so jo uspešno prestali, ob vrnitvi pa so jih že čakali tudi udeleženci preteklih MARSov. Vsi skupaj smo prisluhnili udeležencem različnih mednarodnih tekmovanj iz znanj na olimpijskem večeru, potem pa se je začel piknik in praznovanje MARSovega petega rojstnega dne s torto.

Seveda se je družabni večer z MARSovci vseh generacij zavlekel pozno v noč, ampak to dijakom ni preprečilo, da bi prihodnji dan dokončali še predstavitve svojega dela, ki so ga nato na pristanku prikazali tudi staršem in drugim udeležencem.

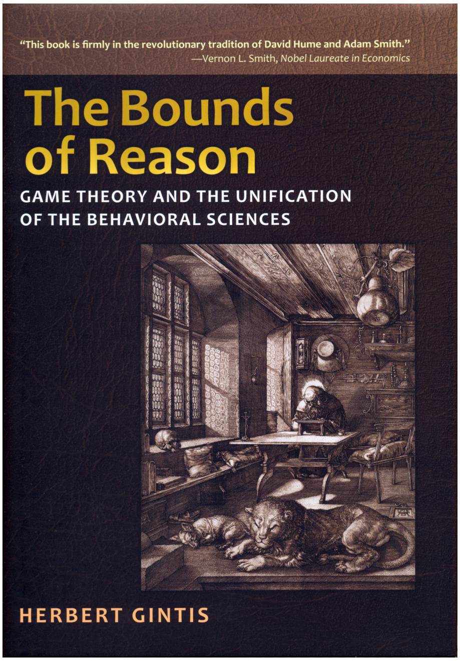
Podrobnosti o poteku dogajanja na MARSu, o delu dijakov, o gostih in o družabnem dogajanju si lahko ogledate tudi na naši spletni strani http://mars.dmfa.si/, kjer bodo v aprilu na voljo tudi informacije o naslednjem MARSu, ki bo predvidoma od 21. do 28. avgusta 2011 zopet v CŠOD Bohinj.

MARS 2010 so finančno podprli Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo RS, Zavarovalnica Triglav in ŠOU v Ljubljani, različna darila za udeležence pa so prispevali g. Simonič, DMFA – založništvo, Logika d. d., IMFM in UP FAMNIT.

Gašper Zadnik

http://www.obzornik.si/

H. Gintis, THE BOUNDS OF REASON – Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2009, 304 strani.



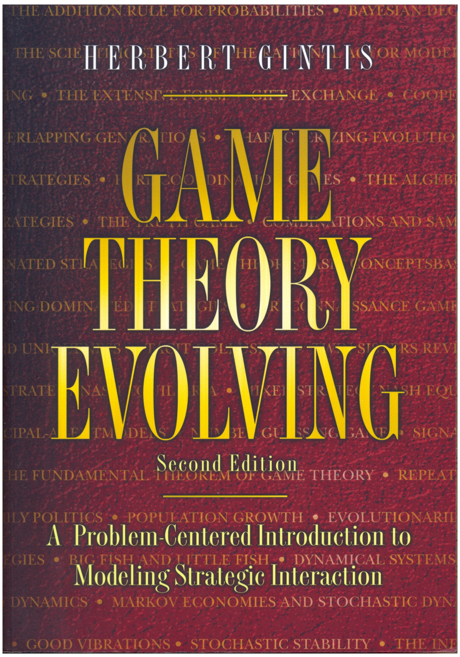
V predstavljeni knjigi Herberta Gintisa ima teorija iger osrednjo vlogo pri razumevanju človekovega vedenja in njegove prirojene nagnjenosti k spreminjanju družbenih norm, četudi v lastno škodo. Teorija iger je namreč pomembna za vse tiste znanosti, ki imajo kakorkoli opravka z obnašanjem oziroma vedenjem ljudi. Take znanosti so na primer biologija, ekonomija, antropologija in politološke znanosti. Vendar pa knjiga dokazuje, da teorija iger sama ne more povsem razložiti človekovega vedenja in da pogosto potrebuje pomoč drugih, tako imenovanih *behaviorističnih znanosti*. Gintis dokazuje, da je sama teorija iger brez širše podpore družboslovnih znanosti zgolj matematični pripomoček in da, če pogledamo z druge strani, ni pravih družboslovnih znanosti brez teorije iger.

Gintis opozarja, da teorija iger ne pojasni, kdaj in kako lahko zaupamo razumu. Teorija iger neupravičeno predpostavlja določene pogoje, toda ljudje imamo svojevrstno obliko spoznavanja in razumevanja, ki nimata le razumskega, ampak tudi socialni predznak. Gintis zagovarja enoten pristop k razumevanju človekovega obnašanja in meni, da postavljanje strogih meja med behavioristična področja v ekonomiji, sociologiji, antropologiji in psihologiji nima nobenega znanstvenega opravičila in da imamo zdaj analitična orodja, ki jih usklajeno povezujejo. Knjiga združuje prednosti klasičnih, evolucijskih in behaviorističnih znanstvenih področij s teorijo iger ter slednje ponuja kot koristno orodje za inovativen študij behaviorističnih znanosti.

Še na kratko o avtorju. Leta 1940 rojeni Herbert Gintis je diplomiral iz matematike na University of Pennsylvania, nato je magistriral, prav tako iz matematike, in sicer na Harvardu, kjer je tudi opravil doktorat iz ekonomije. Kot profesor je predaval na več univerzah in inštitutih v ZDA in Evropi. Od leta 2003 je upokojen. Je avtor knjige *Game Theory Evolving* in avtor oziroma soavtor številnih člankov ter knjig, na primer *Moral Sentiments, Material Interests*, *Unequal Chances* in *Foundations of Human Sociality*.

Marko Razpet

H. Gintis, GAME THEORY EVOLVING – A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2009, 408 strani, druga izdaja.



Knjiga se začne s poglavjem o teoriji verjetnosti in nadaljuje s poglavjem, ki obravnava Bayesovo teorijo odločanja. Začetni poglavji sta namenjeni lažjemu prehodu v tretje poglavje, v katerem so predstavljeni osnovni pojmi teorije iger.
Naslednja tri poglavja obravnavajo različne vrste strategij v teoriji iger in Nashevo ravnovesje. Sledijo poglavja z bolj specifično vsebino, ki vsebujejo tudi manj znane izraze iz poslovnega sveta: model principal-agent, signalne igre in ponovljene igre. Zadnja štiri poglavja knjige imajo poudarek na značilnostih razvojne teorije iger, razvojno stabilnih strategij, dinamičnih sistemih, razvojni dinamiki in stohastičnih dinamičnih sistemih. Pojasnimo na kratko, za kaj gre pri modelu principal-agent. Principal plačuje agenta

za določeno nalogo, toda agent razpolaga z informacijami, ki jih verjetno izrablja za doseganje lastnih ciljev.

Vse pravkar omenjene teme, zlasti njihova pestrost, vključno s klasično teorijo iger in dinamiko sistemov, so v prid knjigi, če jo primerjamo z drugimi s podobno vsebino.

Poglavje se običajno začne s krajšim uvodom v snov, ki jo namerava obravnavati. Sledi glavna razlaga, ki je podkrepljena z zgledi in nalogami za samostojno reševanje. Le-ti posegajo na primer v ekonomske, družboslovne in psihološke znanosti. Rešitve nalog so zbrane na koncu knjige.

Druga izdaja opisane knjige prihaja med bralce devet let za prvo, in to nekoliko predelana ter krajša. Ni običajen učbenik, saj snov podaja s številnimi zgledi z različnih področij in ne le s suhoparno teorijo. V zglede se je treba zares poglobiti ter vživeti. Ravno zaradi tega in vrstnega reda podajanja snovi morda knjiga marsikomu ne bo preveč všeč. Tu in tam je treba kak pojem iskati celo na kasnejših straneh namesto na že pregledanih, je pa tudi nekaj podvajanja. Morda se je avtorju v trenutku nepazljivosti to zgodilo pri predelavi prve izdaje. Zdi se, da se je avtor marsičesa lotil preveč formalno in abstraktno, kar je v nasprotju z njegovim konceptom knjige. So pa raznovrstni zgledi pravi vir nalog iz teorije iger.

Na koncu knjige najdemo seznam uporabljenih simbolov, rešitve nalog, ki so zastavljene sproti, njihove vire, obsežen seznam literature in stvarno kazalo.

Avtorja, uglednega ekonomista Herberta Gintisa, smo že predstavili v opisu njegove knjige *The Bounds of Reason – Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences.*

Marko Razpet

VPRAŠANJA IN ODGOVORI

Dragi bralci, v četrti številki prejšnjega letnika smo zastavili nalogo o gepardu, ki lovi gazelo. Veseli smo, da je naloga naletela na dober odziv, in v povzetku odgovorov vam bomo predstavili glavni oris rešitve. Seveda smo imeli odgovor „na zalogi“ in se z izjemo nekaterih podrobnosti ujema s tistim, ki ga je v knjigi „Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun“ opisal že France Križanič. Na to rešitev so nas opozorili tudi pozorni bralci.

Povzemimo nalogo: v začetku je gazela v izhodišču koordinatnega sistema, ko opazi geparda pa začne bežati v smeri osi y s hitrostjo v_0. Gepard je na začetku na osi x pri koordinati $-x_0 < 0$, nato pa lovi gazelo s stalno hitrostjo v_1 tako, da je vseskozi usmerjen proti gazeli. Gepard ujame gazelo v točki $(0, y_0)$.

Gibanje geparda je opisano s parametrično krivuljo $t \mapsto (x(t), y(t))$. Očitno je $t \mapsto x(t)$ strogo naraščajoča funkcija, zato lahko gepardovo pot opišemo z grafom funkcije $y = y(x)$. Ker je gepard vseskozi obrnjen proti gazeli, je smerni koeficient tangente na krivuljo $y(x)$ v točki, ki jo gepard doseže ob času t, enak:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y - v_0 t}{x}\,. \tag{1}$$

Iz te enačbe želimo eliminirati čas, zato jo prepišemo v $xy' = y - v_0 t$ in odvajamo po x: $y' + xy'' = y' - v_0 t'$, kjer t' označuje dt/dx. Komponenta gepardove hitrosti v smeri osi x je

$$\frac{dx}{dt} = v_1 \cos\varphi = \frac{v_1}{\sqrt{1 + y'^2}}\,.$$

Če to upoštevamo v preoblikovani enačbi (1), dobimo

$$xy'' = -k\sqrt{1 + y'^2}\,,$$

kjer smo označili $k = v_0/v_1$. V enačbi lahko ločimo spremenljivki

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -k\frac{dx}{x}$$

in integriramo. Integral na levi spada med osnovne integrale in ga lahko napišemo kot $\operatorname{arsh} y'$ ali pa kot dolgi logaritem $\ln(y' + \sqrt{y'^2 + 1})$. Dobimo

$\operatorname{arsh} y' = -k \ln|x| + c$. Začetni pogoj narekuje, da je odvod gepardove krivulje enak nič, saj je gepard obrnjen proti gazeli, ki je takrat v izhodišču: $0 = -\ln x_0^k + c$ in zato

$$y' = \operatorname{sh} \ln \frac{x_0^k}{|x|^k} = \operatorname{sh} \ln \frac{x_0^k}{(-x)^k}\,.$$

Z uporabo $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ dobimo

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^k}{(-x)^k} - \frac{(-x)^k}{x_0^k}\right).$$

Ponovno integriramo in upoštevamo začetni pogoj $y(-x_0) = 0$:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{(-x)^{k+1}x_0^{-k}}{1+k} - \frac{x_0^k(-x)^{1-k}}{1-k}\right) + \frac{x_0 k}{1-k^2}\,. \tag{2}$$

Na podoben način pridemo do enakega rezultata, če najprej zapišemo dolžino poti, ki jo do trenutka t opravi gepard: $s = v_1 t$. Pot izrazimo še s krivuljnim integralom in dobimo zvezo:

$$t = \frac{1}{v_1}\int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}\,dx\,. \tag{3}$$

V tem času gazela priteče vzdolž osi y do $v_0 t$. Ker je gepard usmerjen proti gazeli, velja

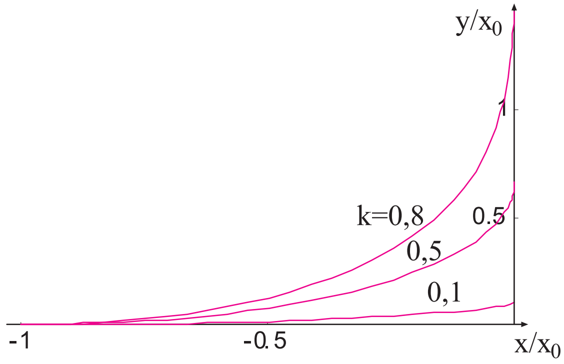
$$y' = \frac{y - v_0 t}{x} = \frac{y - k\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx}{x}\,.$$

Enačbo pomnožimo z x in odvajamo po x. Spomnimo: če odvajamo integral neke funkcije po spremenljivki v meji, je tak odvod enak vrednosti funkcije na meji: $\frac{d}{dx}\int_{konst}^{x} f(u)\,du = f(x)$. Dobimo seveda enako kot prej

$$y' + y''x = y' - k\sqrt{1+y'^2}\,.$$

Pot geparda za tri različna razmerja hitrosti $k = 0.1;\ 0.5;\ 0.8$ kaže slika 1. Kadar je gepard le malo hitrejši od gazele ($k \to 1$), se krivulja skoraj asimptotično približuje navpični osi in lov lahko traja zelo dolgo.

Čas, ki ga gepard potrebuje, da ujame gazelo, bi lahko izračunali iz (3). Lažje pa pridemo do istega rezultata, če izračunamo čas, ki ga do konca porabi gazela. Konec se zgodi v točki $(0, y_0)$ na osi y. Te točke ni težko



Slika 1

izračunati iz (2): $y_0 = \frac{kx_0}{1-k^2}$. Do te točke gazela teče s konstantno hitrostjo v_0 in za pot potrebuje

$$t = \frac{x_0}{v_1(1-k^2)} \, .$$

Pri $k \to 1$ gre čas $t \to \infty$. Za $k > 1$ bi dobili $t < 0$, kar pa ni fizikalno smiseln rezultat. Če je gepard počasnejši od gazele, je seveda ne bo ujel.

Povejmo še zgodbo o kmetu in prašičku. Kmet stoji v oglišču kvadratne ograde, v oglišču diagonalno nasproti zeva luknja, prašiček pa je v sosednjem oglišču. Prašiček se v trenutku, ko začnemo meriti čas, požene s hitrostjo v_0 proti luknji, kmet pa, enako kot prej gepard, s hitrostjo v_1 ves čas teče v smeri proti prašičku. Kolikšna vsaj mora biti kmetova hitrost, da prašička ujame pred luknjo? Najmanjšo hitrost potrebuje v mejnem primeru, ko prašička ujame pri luknji. Krivulja gibanja kmeta je enaka kot pri gepardu. Kmet ujame prašička, če je $y(x = 0) = x_0$, saj smo privzeli kvadratno ograda. Pogoju zadosti k, ki je rešitev enačbe $k = 1-k^2$. Fizikalno smiselna rešitev je $k = (\sqrt{5}-1)/2$ oziroma $v_1 = (\sqrt{5}+1)v_0/2 \approx 1.618 v_0$.

Ob obravnavi naloge z gepardom se je cenjenemu bralcu porodila podobna zanimiva naloga, ki vam jo podajamo v premislek. Ime naloge je *Gospod Hulot in njegov pes gresta na sprehod.* Pes je na vrvici, ki jo g. Hulot krajša z enakomerno hitrostjo. Po kakšni krivulji se giblje pes, če g. Hulot koraka s konstantno hitrostjo naravnost v smeri pravokotno na začetno smer vrvice?

Aleš Mohorič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2011
Letnik 58, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Slika prikazuje ples laserskega curka med štirimi zgoščenkami, ki so zlepljene s podatkovnimi stranmi nasproti v kvadratni okvir. Sredinske luknje na zgoščenkah so prekrite z dovolj velikimi koščki pete zgoščenke. Curek vstopa od zgoraj in se zaradi interference razcepi na več delnih curkov, ki nadaljujejo svojo pot tako, kot uči optika. V vodo smo dodali nekaj kapljic mleka, da so laserski curki vidni. (Avtor: Gorazd Planinšič)