IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2019
Letnik 66
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2019, letnik 66, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

GENERATORJI PRAŠTEVIL

JANKO BRAČIČ

Naravoslovnotehniška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11A41

Generator praštevil je postopek, ki nam na vsakem koraku vrne praštevilo oziroma množico praštevil. V članku predstavimo nekaj znanih in manj znanih generatorjev praštevil.

PRIME NUMBER GENERATORS

A prime generator is an algorithm which on each step returns a prime number or a set of prime numbers. In this paper we present some known and less known prime generators.

Uvod

Množica naravnih števil $\mathbb{N}$ ima po eni strani preprosto strukturo, ki se nanaša na seštevanje. Do vsakega naravnega števila pridemo z enostavnim postopkom: začnemo s številom 1, prištejemo 1 in dobimo 2, spet prištejemo 1 in dobimo 3 itd. Rečemo lahko, da ima aditivna struktura v $\mathbb{N}$ en sam osnovni gradnik, število 1. Tesno povezana z aditivno strukturo v $\mathbb{N}$ je dobra urejenost te množice.

Po drugi strani je multiplikativna struktura množice $\mathbb{N}$ manj enostavna. Potrebujemo veliko osnovnih gradnikov – praštevil, da lahko vsako naravno število izrazimo kot njihov produkt. Že starogrški matematiki so vedeli, da za vsako naravno število $n \geq 2$ obstajajo takšna enolično določena praštevila $p_1 < \cdots < p_k$ in naravna števila $e_1, \ldots, e_k$, da je $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$. Na tem *osnovnem izreku aritmetike* sloni Evklidov dokaz, da je praštevil neskončno mnogo. Idejo njegovega dokaza lahko uporabimo za konstrukcijo generatorja praštevil. Z generatorjem praštevil imamo v mislih postopek, ki nam ob ustreznih začetnih podatkih da eno ali več praštevil. Iz Evklidovega dokaza lahko izluščimo naslednji postopek za generiranje praštevil.

- Naj bo $\{q_1, \ldots, q_l\}$ poljubna množica praštevil;
- produktu $q_1 \cdots q_l$ prištejemo 1, da dobimo število $n = q_1 \cdots q_l + 1 > 2$;
- osnovni izrek aritmetike zagotavlja obstoj takšnih enolično določenih praštevil $p_1 < \cdots < p_k$ in naravnih števil $e_1, \ldots, e_k$, da je $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$;
- dobili smo množico praštevil $\{p_1, \ldots, p_k\}$ in vsako od njih je različno od praštevil v začetni množici.

Ker je $\{q_1, \ldots, q_l\}$ prava podmnožica v $\{q_1, \ldots, q_l, p_1, \ldots, p_k\}$, lahko sklepamo, da je praštevil neskončno mnogo.

K pravkar opisanemu generatorju praštevil se bomo vrnili pozneje, ko bomo govorili o njegovih variantah, celi družini generatorjev praštevil, ki jim rečemo evklidski generatorji praštevil.

Obrazci za računanje praštevil

Že Euler je opazil, da je vrednost polinoma $f(n) = n^2 + n + 41$ praštevilo za vse $n = 0, 1, \ldots, 39$. Ker je $f(40) = 1681 = 41^2$, ta kvadratni polinom ni generator praštevil. Seveda lahko z interpolacijo za vsak nabor praštevil $p_1, \ldots, p_k$ najdemo takšen polinom f, da je $f(n) = p_n$ za vse $n = 1, \ldots, k$. Na žalost pa pri interpolaciji stopnja polinoma f narašča s k. Green in Tao [5] sta dokazala zelo globok izrek o praštevilih. Pokazala sta, da so v množici praštevil poljubno dolga aritmetična zaporedja. Z drugimi besedami, za vsako naravno število k obstajata takšni naravni števili u_k, v_k, da je vrednost linearne funkcije $l(n) = u_k n + v_k$ praštevilo za vse $n = 1, 2, \ldots, k$. Števili u_k in v_k sta si seveda tuji, zato je po Dirichletovem izreku o praštevilih v aritmetičnem zaporedju $l(n)$ neskončno mnogo praštevil. A že zelo enostaven argument nas prepriča, da $l(n)$ ne more biti praštevilo za vse $n \in \mathbb{N}$. Namreč, za $n = u_k + v_k + 1$ je $l(n) = (u_k + 1)(u_k + v_k)$. Pravzaprav ni takšnega nekonstantnega polinoma f, katerega vrednost $f(n)$ bi bila praštevilo za vsako naravno število n. Dokažemo lahko še več.

Trditev 1. *Ne obstaja takšen nekonstanten polinom f, katerega vrednosti $f(n)$ so praštevila za vsa naravna števila n iz nekega aritmetičnega zaporedja naravnih števil.*

Dokaz. Ideja dokaza je iz [6]. Vzemimo, da obstajata takšen nekonstanten polinom f in takšno aritmetično zaporedje $A = \{dk + e;\ k = 0, 1, 2 \ldots\}$, da je $f(n)$ praštevilo za vse $n \in A$. Potem je $f(e) = p$ praštevilo. Ker je $dpj + e \in A$ za vse $j \in \mathbb{N}$, je tudi vsako od števil $f(dpj + e)$ praštevilo. Iz $dpj + e \equiv e \pmod{p}$ sledi $(dpj + e)^m \equiv e^m \pmod{p}$ za vsako naravno število m, kar nam da $f(dpj + e) \equiv f(e) \equiv 0 \pmod{p}$ za vse $j \in \mathbb{N}$. To pomeni, da je praštevilo $f(dpj + e)$ enako p. Toda to je nemogoče, saj nekonstanten polinom ne more zavzeti iste vrednosti neskončnokrat. ∎

Zdaj, ko vemo, da ni takšnega polinoma f, pri katerem bi bilo $f(n)$ praštevilo za vsa števila n iz nekega aritmetičnega zaporedja naravnih števil, se postavlja vprašanje, ali sploh obstaja takšna nekonstantna funkcija f, katere vrednosti $f(n)$ so praštevila za vse n iz neke neskončne množice naravnih števil. Preden odgovorimo na to vprašanje, dokažimo naslednjo trditev.

Lema 2. *Naravno število $n \neq 4$ je praštevilo natanko tedaj, ko n ne deli števila $(n-1)!$.*

Dokaz. Če je n praštevilo, potem število $(n-1)!$ ni deljivo z n. Za dokaz obrata moramo pokazati, da vsako naravno število $n \neq 4$, ki ni praštevilo, deli število $(n-1)!$. Ker za $n = 1$ to očitno velja, lahko predpostavimo, da je n sestavljeno število. Vzemimo najprej, da obstaja razcep $n = uv$, kjer sta $1 < u < v < n$. Potem seveda u in v nastopata v produktu $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots u \cdots v \cdots (n-1)$ in zato $n|(n-1)!$. Razcep $n = uv$ z $1 < u < v < n$ obstaja za vsako sestavljeno število n, razen za števila oblike $n = p^2$, kjer je p praštevilo. Predpostavimo torej, da je $n = p^2$ za neko praštevilo p. Ker je $n \neq 4$, je p liho praštevilo. Iz $(p^2-1)! = 1 \cdot 2 \cdots p \cdot (p+1) \cdots (2p) \cdot (2p+1) \cdots (p^2-1)$ vidimo, da $p^2|(p^2-1)!$. ∎

Za realno število x označimo z $\lfloor x \rfloor$ največje celo število, ki ne presega x, in z $\lceil x \rceil$ najmanjše celo število, ki ga x ne presega. Na primer, $\lfloor 2{,}4 \rfloor = 2$ in $\lceil 2{,}4 \rceil = 3$. Če je x celo število, potem je $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$.

Poglejmo zdaj funkcijo

$$f(n) = \left\lceil \frac{2(n-1)!}{n} - \left\lfloor \frac{2(n-1)!}{n} \right\rfloor \right\rceil (n-2) + 2.$$

Izračunamo lahko, da je $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 2$, $f(5) = 5$, $f(6) = 2$ itd.

Trditev 3. *Funkcija f je generator praštevil. Če je n praštevilo, je $f(n) = n$, za druga naravna števila n pa je $f(n) = 2$.*

Dokaz. Če je n liho praštevilo, potem po lemi 2 število $\frac{2(n-1)!}{n}$ ni celo, kar pomeni, da je $\frac{2(n-1)!}{n} - \left\lfloor \frac{2(n-1)!}{n} \right\rfloor$ število z intervala $(0, 1)$ in zato $\left\lceil \frac{2(n-1)!}{n} - \left\lfloor \frac{2(n-1)!}{n} \right\rfloor \right\rceil = 1$. Ker že vemo, da je $f(2) = 2$, lahko zaključimo, da je $f(n) = n$, če je n praštevilo. Po drugi strani, če je $n \neq 4$ sestavljeno število ali enako 1, je po lemi 2 $\frac{2(n-1)!}{n}$ celo število in zato $\frac{2(n-1)!}{n} - \left\lfloor \frac{2(n-1)!}{n} \right\rfloor = 0$. Ker je $f(4) = 2$, vidimo, da je $f(n) = 2$, če n ni praštevilo. ∎

Naša konstrukcija funkcije f iz trditve 3 temelji na funkciji, ki je predstavljena na spletni strani [10].

Bertrandov postulat (včasih imenovan tudi izrek Bertrand-Čebiševa) pravi, da za vsako število $x > 1$ obstaja na intervalu $[x, 2x]$ vsaj eno praštevilo. Odkar je leta 1852 Čebišev dokazal ta izrek, so ga matematiki precej izboljšali. Tako so, na primer, leta 2001 Baker, Harman in Pintz v članku [1] pokazali, da obstaja takšno število $x_0 > 0$, da za vsak $x \geq x_0$ interval $[x, x + x^{21/40}]$ vsebuje vsaj eno praštevilo. Avtorji v svojem članku trdijo, da je mogoče število x_0 efektivno izračunati, a ne navajajo nobene ocene za velikost števila x_0.

Označimo s p_n n-to praštevilo. Torej, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ itd. Iz rezultata, ki so ga dokazali Baker, Harman in Pintz, sledi, da obstaja takšen

indeks n_0, da je

$$p_n < p_{n+1} < p_n + p_n^{21/40} < p_n + p_n^{2/3} \qquad \text{za vse} \quad n \geq n_0.$$

Lema 4 ([7]). *Če je N takšno naravno število, za katerega velja $p_{n_0} < N^3$, potem obstaja takšno praštevilo q, da je $N^3 < q < (N+1)^3 - 1$.*

Dokaz. Naj bo p_n največje praštevilo, za katerega velja $p_n < N^3$. Potem je $n \geq n_0$ in torej velja $N^3 < p_{n+1} < p_n + p_n^{2/3} < N^3 + N^2 < (N+1)^3 - 1$. ∎

Cheng [4] je pokazal, da lema 4 velja za vsako število $N > e^{e^{15}}$. Se pravi, da lahko za p_{n_0} vzamemo najmanjše praštevilo, ki presega $e^{3e^{15}}$.

Naj bo zdaj $q_0 > e^{3e^{15}}$ poljubno praštevilo. S pomočjo leme 4 lahko dobimo neskončno zaporedje praštevil $q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$, za katerega velja

$$q_n^3 < q_{n+1} < (q_n + 1)^3 - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Definirajmo zaporedji

$$u_n = q_n^{3^{-n}} \qquad \text{in} \qquad v_n = (q_n + 1)^{3^{-n}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Lema 5 ([7]). *Zaporedje u_n je monotono naraščajoče, zaporedje v_n je monotono padajoče in pri vsakem n je $u_n < v_n$.*

Dokaz. Očitno je $u_n < v_n$. Pri vsakem n velja $u_{n+1} = q_{n+1}^{3^{-n-1}} > (q_n^3)^{3^{-n-1}} = q_n^{3^{-n}} = u_n$ in $v_{n+1} = (q_{n+1}+1)^{3^{-n-1}} < ((q_n+1)^3-1+1)^{3^{-n-1}} = (q_n+1)^{3^{-n}} = v_n$. ∎

Trditev 6 ([7]). *Obstaja takšno število $\alpha > 1$, da je funkcija*

$$g(n) = \left\lfloor \alpha^{3^n} \right\rfloor \qquad (n \in \mathbb{N})$$

generator praštevil.

Dokaz. Naj bosta u_n in v_n zaporedji, ki smo ju definirali prej. Ker je zaporedje u_n monotono naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno. Naj bo $\alpha = \lim_{n\to\infty} u_n$. Ker je v_n monotono padajoče zaporedje in velja $u_n < v_n$, je $u_n < \alpha < v_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Od tod sledi $q_n = u_n^{3^n} < \alpha^{3^n} < v_n^{3^n} = q_n + 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Torej je $\lfloor \alpha^{3^n} \rfloor = q_n$. ∎

Obe funkciji, ki smo ju predstavili v tem razdelku, imata le teoretični pomen, za konkretno generiranje praštevil nista uporabni. Bolj ali manj je tako z vsemi funkcijami, ki generirajo praštevila. Funkcija f iz trditve 3 zahteva veliko računskih operacij za izračun vrednosti $f(n)$. Funkcija g iz trditve 6 pa ima to dodatno pomanjkljivost, da števila α ne poznamo, saj je definirano kot limita. V naslednjem razdelku bomo zato pogledali generatorje praštevil, ki so bolj priročni.

Sita

Sito je postopek, ki v dani neprazni končni množici naravnih števil poišče vsa praštevila. Najbolj znano je Eratostenovo sito. Postopek je naslednji. Naj bo M končna neprazna množica naravnih števil in naj bo m največje število v M. Množico M presejemo takole:

- naj bo $M_1 = M \setminus \{1\}$;
- za vsak $n = 2, \ldots, \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, naj bo $M_n = M_{n-1} \setminus \{kn;\ k = 2, \ldots, \lfloor \frac{m}{n} \rfloor\}$.

Ko je postopek končan, dobimo množico $M_{\lfloor \sqrt{m} \rfloor}$, v kateri so natanko vsa praštevila iz množice M. Verjetno tega ni treba dokazovati, saj je Eratostenovo sito zelo znan generator praštevil.

Indijski matematik Sundaram je leta 1934 odkril zelo zanimivo sito. Naša predstavitev tega sita temelji na [11]. Začnimo z naslednjo tabelo

naravnih števil.

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & 25 & \dots \\ 7 & 12 & 17 & 22 & 27 & 32 & 37 & 42 & \dots \\ 10 & 17 & 24 & 31 & 38 & 45 & 52 & 59 & \dots \\ 13 & 22 & 31 & 40 & 49 & 58 & 67 & 76 & \dots \\ 16 & 27 & 38 & 49 & 60 & 71 & 82 & 93 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \tag{1}$$

Kaj je na tej tabeli zanimivega? Vidimo, da je v vsaki vrstici in vsakem stolpcu aritmetično zaporedje števil. V prvem stolpcu je v j-ti vrstici število $4+3(j-1) = 3j+1$. To je prvi člen aritmetičnega zaporedja v j-ti vrstici. Razlika aritmetičnega zaporedja v j-ti vrstici je liho število $2j+1$. Se pravi, da je v j-ti vrstici in k-tem stolpcu število $3j+1+(k-1)(2j+1) = 2jk+j+k$. Zdaj lahko razkrijemo najbolj zanimivo lastnost tabele (1).

Trditev 7. *Liho število $2n+1$ je praštevilo natanko tedaj, če število n <u>ni</u> v tabeli* (1)*.*

Dokaz. Videli smo, da so v tabeli (1) natanko vsa naravna števila oblike $n = 2jk+j+k$ $(j,k \in \mathbb{N})$. Za takšno število n pa velja $2n+1 = 4jk+2i+2k+1 = (2j+1)(2k+1)$, kar pomeni, da $2n+1$ ni praštevilo. Po drugi strani, če $2n+1$ ni praštevilo, je produkt dveh lihih števil $2j+1$ in $2k+1$. Iz $2n+1 = (2j+1)(2k+1)$ sledi, da je $n = jk+j+k$, torej število iz tabele (1). ∎

S postopkom, ki mu rečemo Sundaramovo sito, lahko poiščemo vsa praštevila v neprazni končni množici števil M. Naj bo m najmanjše naravno število, za katerega velja $n \leq 2m+2$ za vse $n \in M$. Postopek poteka takole:

- naj bo $M_0 = M \setminus (\{2k;\ k = 2, \dots, m+1\} \cup \{1\})$,
- za vsak $j = 1, \dots, \lfloor \frac{2m-1}{6} \rfloor$, naj bo $M_j = M_{j-1} \setminus \{(2j+1)(2k+1);\ k = 1, \dots, j\}$.

Na prvem koraku smo izločili soda sestavljena števila in število 1, na drugem koraku pa liha sestavljena števila. V množici $M_{\lfloor\frac{2m-1}{6}\rfloor}$ so ostala le praštevila, ki so v M. Še pojasnilo, zakaj število j teče od 1 do $\lfloor\frac{2m-1}{6}\rfloor$. Namreč, vsako sestavljeno liho število v M je oblike $(2j+1)(2k+1)$, kjer je $j \geq k$. Ker je vedno $2k+1 \geq 3$, je dovolj, da je $j \leq \lfloor\frac{2m-1}{6}\rfloor$, saj za $\lfloor\frac{2m-1}{6}\rfloor + 1$ že velja $3\big(2(\lfloor\frac{2m-1}{6}\rfloor + 1) + 1\big) \geq 3\big(2\frac{2m-1}{6} + 1\big) = 2m+2$. V nekaterih primerih je res potrebno, da j teče do $\lfloor\frac{2m-1}{6}\rfloor$. Naj bo na primer $p = 2t+1 > 3$ liho praštevilo in M poljubna množica naravnih števil, v kateri je $3p$ največje število. Ni težko videti, da je $m = \frac{3p-1}{2} = 3t+1$ najmanjše naravno število, pri katerem velja $n \leq 2m+2$ za vse $n \in M$. Število $3p$ je liho in sestavljeno, kot produkt dveh lihih naravnih števil različnih od 1 ga lahko zapišemo samo na en način: $3p = (2t+1)(2 \cdot 1 + 1)$. Se pravi, da ga z zgornjim algoritmom izločimo iz množice M šele na koraku, ko je $j = t = \lfloor\frac{2m-1}{6}\rfloor$.

Evklidski generatorji praštevil

Na koncu se vrnimo k Evklidu in njegovemu dokazu, da je praštevil neskončno mnogo. Generator praštevil, ki smo ga opisali v uvodu, je Mullin [8] nekoliko spremenil in definiral dva generatorja praštevil. Prvo Mullinovo zaporedje praštevil dobimo takole:

- naj bo $q_1 = 2$,
- za vsak $k \in \mathbb{N}$ naj bo q_{k+1} najmanjše praštevilo, ki deli $q_1 \cdots q_k + 1$,

drugo Mullinovo zaporedje pa takole:

- naj bo $Q_1 = 2$,
- za vsak $k \in \mathbb{N}$ naj bo Q_{k+1} največje praštevilo, ki deli $Q_1 \cdots Q_k + 1$.

V naslednji tabeli, ki je povzeta po [2], je prvih deset členov obeh zaporedij

k	q_k	Q_k
1	2	2
2	3	3
3	7	7
4	43	43
5	13	139
6	53	50 207
7	5	340 999
8	6 221 671	2 365 347 734 339
9	38 709 183 810 571	4 680 225 641 471 129
10	139	1 368 845 206 580 129

Zelo malo je znanega o teh dveh zaporedjih praštevil. Tako je še vedno nerešen problem, ali se v zaporedju q_k pojavijo vsa praštevila. Za zaporedje Q_k je Booker [2] pokazal, da v njem manjka neskončno mnogo praštevil.

Za konec poglejmo nekoliko drugačen evklidski generator praštevil, ki ga je objavil Wooley leta 2017. Potrebujemo naslednjo lemo.

Lema 8 ([9]). *Za vsako naravno število n je najmanjše praštevilo, ki deli $n^{n^n}-1$, enako najmanjšemu praštevilu, ki ne deli n.*

Dokaz. Za $n = 1$ trditev očitno velja, zato predpostavimo, da je $n \geq 2$. Če je n liho število, je 2 najmanjše praštevilo, ki ne deli n. Očitno 2 deli $n^{n^2}-1$. Tudi obratno velja, če 2 deli $n^{n^n}-1$, potem je n liho število in je torej 2 najmanjše praštevilo, ki ne deli n. Vzemimo zdaj, da je n sodo število. Naj bodo $q_1, \ldots, q_k$ vsa praštevila, ki delijo n in p najmanjše praštevilo, ki ne deli n. Torej je $p \geq 3$ in $q_1 \cdots q_k + 1 \leq n + 1$. Evklidov argument nam zagotavlja, da obstaja praštevilo q, ki deli $q_1 \cdots q_k + 1$. To praštevilo seveda ne deli n in je manjše kvečjemu enako $q_1 \cdots q_k + 1$. Ker pa je po predpostavki p najmanjše praštevilo, ki ne deli n, je $p \leq q$ in zato $p \leq q_1 \cdots q_k + 1 \leq n + 1$.

Naj bodo $p_1, \ldots, p_j$ praštevila, ki delijo $p-1$, velja naj $p-1 = p_1^{e_1} \cdots p_j^{e_j}$. Potem zaradi $p_j < p$ in predpostavke, da je p najmanjše praštevilo, ki ne deli n, sledi, da je vsako od praštevil $p_1, \ldots, p_j$ v množici praštevil $\{q_1, \ldots, q_k\}$, ki delijo n.

Za vsako praštevilo q_i velja $q_i^n \geq 2^n \geq n + 1 \geq p$. Med drugim to velja tudi za vsako praštevilo p_i, ki deli $p - 1$. Torej je $p_i^{e_i} \leq p - 1 < n + 1 \leq p_i^n$ oziroma $e_i < n$ za vse $i = 1, \ldots, j$. Od tod sklepamo, da $p - 1$ deli število $(p_1 \cdots p_j)^n$ in torej tudi število n^n. Naj bo $d \in \mathbb{N}$ takšno število, da je

$n^n = d(p-1)$. Ker p ne deli n, lahko uporabimo mali Fermatov izrek in dobimo $n^{n^n} = (n^d)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Torej p deli $n^{n^n} - 1$. Vsako praštevilo, ki deli $n^{n^n} - 1$, seveda ne deli n in je zato večje kvečjemu enako praštevilu p, ki je najmanjše praštevilo, ki ne deli n. Se pravi, da je p najmanjše praštevilo, ki deli $n^{n^n} - 1$. Isti argument nam zagotavlja, da velja tudi obratna implikacija. Če je p najmanjše praštevilo, ki deli $n^{n^n} - 1$, potem p ne deli n. To praštevilo je najmanjše med tistimi, ki ne delijo n, saj smo že videli, da najmanjše praštevilo, ki ne deli n, deli $n^{n^n} - 1$. ∎

Wooleyev generator praštevil je naslednji postopek:

- naj bo $p_1 = 2$;
- za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, naj bo $n = p_1 \cdots p_{k-1}$ in p_k najmanjše praštevilo, ki deli $n^{n^n} - 1$.

Z uporabo leme 8 vidimo, da nam algoritem na k-tem koraku vrne k-to najmanjše praštevilo. Se pravi, s tem postopkom dobimo natanko vsa praštevila, urejena po velikosti.

LITERATURA

[1] R. C. Baker, G. Harman in J. Pintz, *The difference between consecutive primes, II*, Proceedings of the London Mathematical Society **83** (2001), 532–562.

[2] A. R. Booker, *On Mullin's second sequence of primes*, Integers **12** (2012), 1167–1177.

[3] A. R. Booker in C. Pomerance, *Squarefree smooth numbers and Euclidean prime generators*, Proceedings of the American Mathematical Society **145** (2017), 5035–5042.

[4] Y. F. Cheng, *Explicit estimate on primes between consecutive cubes*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **40** (2010), 117–153.

[5] B. Green in T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Mathematics (2) **167** (2008), 481–547.

[6] N. Mackinnon, *Prime number formulae*, The Mathematical Gazette **71** (1987), 113–114.

[7] W. H. Mills, *A prime-representing function*, Bulletin of the American Mathematical Society **53** (1947), 604.

[8] A. A. Mullin, *Recursive function theory. (A modern look at a Euclidean idea.)*, Bulletin of the American Mathematical Society **69** (1963), 737.

[9] T. D. Wooley, *A Superpowered Euclidean prime generator*, American Mathematical Monthly **124** (2017), 351–352.

[10] *Formula for primes*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes`, ogled 22. 12. 2018.

[11] *Sieve of Sundaram*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Sieve_of_Sundaram`, ogled 22. 12. 2018.

BERTRANDOV POSTULAT

ALEKSANDER SIMONIČ

School of Science
The University of New South Wales (Canberra)

Math. Subj. Class. (2010): 11N05, 11A41

V članku predstavimo Ramanujanov dokaz Bertrandovega postulata. Omenimo tudi nekatere odprte probleme v povezavi s praštevilskimi vrzelmi.

BERTRAND'S POSTULATE

We present Ramanujan's proof of Bertrand's postulate. We also mention some open problems related to prime gaps.

Uvod

Leta 1845 je francoski matematik **Joseph Louis François Bertrand** (1822–1900) v razpravi o permutacijah zapisal naslednje: *za vsako naravno število* $n \geq 4$ *obstaja praštevilo* p*, ki je večje od* n *in manjše od* $2n - 2$. Trditev je preveril za $n = 1, \ldots, 3 \cdot 10^6$, dokazati pa me je ni uspelo. Domneva je dobila ime *Bertrandov postulat*. Čeprav je že več kot 150 let znana njena pravilnost, se je tako ime še vedno drži. Danes se pogosto navaja šibkejša različica problema: *za vsako naravno število* $n \geq 1$ *obstaja praštevilo* $p \in (n, 2n]$.

Pafnuciju Lvoviču Čebiševu (1821–1894), očetu ruske matematične šole, je hipotezo sedem let kasneje uspelo dokazati v članku [4]. Pri tem je uvedel posebni funkciji, ki sta postali stalnici v analitični teoriji števil. Enostavnejši dokaz, obravnavan v tem prispevku, je leta 1919 objavil indijski samouk **Srinivasa Ramanujan** (1887–1920), glej [8]. Ta matematični genij je že v otroštvu pokazal izjemen matematični talent, vendar je bil »odkrit« šele leta 1910. Na prigovarjanje G. H. Hardyja je leta 1914 prispel v Cambridge, kjer so mu po dveh letih podelili doktorat. Kljub pomanjkanju matematične natančnosti, ki je bila posledica neformalne izobrazbe,

je dosegel zavidljive rezultate na področju specialnih funkcij v povezavi s teorijo števil. Kot se je izrazil Hardy, je Ramanujan do svojih odkritij prišel s povezovanjem trditev, intuicije in nepojasnjenega sklepanja, sposobnost primerljiva z Eulerjevo. Zaradi izjemno slabega zdravja se je vrnil v Indijo, kjer je kmalu zatem tudi umrl. Leta 1932 je nov dokaz prispeval tudi sloviti madžarski matematik **Paul Erdős** (1913–1996), kar je bil njegov prvi raziskovalni prispevek. Erdősev dokaz ne uporablja funkcij Čebiševa in se na številnih mestih, posebno v povezavi z binomskimi koeficienti, ujema z Ramanujanovim dokazom. Manj znan dokaz je leta 1944 objavil še indijski številski teoretik in v številnih pogledih Ramanujanov matematični naslednik **S. S. Pillai** (1901–1950), ki se je proslavil z delom na področju Waringovega problema. Kasneje je izdelal še en dokaz, ki uporablja samo racionalna števila, vendar mu je objavo preprečila letalska nesreča, v kateri je umrl na poti v ZDA na 11. mednarodni kongres matematikov in enoletno izpopolnjevanje na Univerzi Princeton. Oba dokaza sta reproducirana v [7], kjer lahko bralec izve tudi več o njegovem življenju in delu.

Upravičeno lahko rečemo, da je danes Erdősev dokaz najbolj znan, verjetno tudi po zaslugi knjige [2]. Vendar je ozadje dokaza Čebiševa, Ramanujana ali Pillaia bolj v sozvočju s klasičnimi metodami analitične teorije števil, zato je tudi primernejši za uvod v to področje matematike. Za razumevanje članka je dovolj znanje srednješolske matematike.

Funkciji Čebiševa

Tvorimo zaporedje naravnih števil $n_1, n_2, \ldots$ na naslednji način: postavimo $n_1 = 4$ in za $k \geq 2$ naj bo n_k največje praštevilo, manjše od $2n_{k-1} - 2$. Nekaj prvih elementov tega zaporedja je

$$4, 5, 7, 11, 19, 31, 59, 113, 223, 443, 883, 1759, 3511, 7019, \ldots$$

Očitno je Bertrandov postulat ekvivalenten trditvi, da je zgornje zaporedje strogo naraščajoče. Označimo s $\pi(x)$ število praštevil, ki ne presegajo po-

zitivnega realnega števila x. Opomnimo, da je kodomena funkcije π podmnožica naravnih števil. Če je $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ za $x \geq 8$, je Bertrandov postulat dokazan. Zakaj? Če je slednje pravilno, za vsako naravno število $n \geq 4$ interval $(n, 2n]$ vsebuje vsaj dve praštevili. Ker $2n$ in $2n-2$ nista praštevili, interval $(n, 2n-2)$ vsebuje vsaj eno praštevilo, kar pa je vsebina Bertrandovega postulata. Glede na prej zapisano zadošča preveriti $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ za $x \geq 2000$.

Bolj prikladno kot s *praštevilsko funkcijo* $\pi(x)$ je delati s *funkcijama Čebiševa*. Čebišev je v dokazu Bertrandovega postulata uvedel funkciji

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

in

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta\left(x^{1/2}\right) + \vartheta\left(x^{1/3}\right) + \cdots . \tag{1}$$

Zgornja vsota gre po praštevilih p in za $x < 2$ definiramo $\vartheta(x) = 0$. Očitno je $\vartheta(x) \leq \psi(x)$. Funkcijo ψ lahko izrazimo tudi drugače. Naj bo $\Lambda(n)$ funkcija, različna od nič le pri potencah praštevil, za potenco praštevila p pa enaka $\log p$. Potem je

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p^2 \leq x} \log p + \sum_{p^3 \leq x} \log p + \cdots = \sum_{n \leq x} \Lambda(n). \tag{2}$$

Funkcije π, ϑ in ψ so osrednje funkcije analitične teorije števil. Velikokrat se izkaže, da je najenostavneje delati s funkcijo ψ. Začetna ideja je, da spodnjo mejo za razliko $\pi(x) - \pi(x/2)$ izrazimo s funkcijo ψ. Ker je izraz $\vartheta(x) - \vartheta(x/2)$ enak vsoti logaritmov praštevil na intervalu $(x/2, x]$, velja preprosta ocena

$$\pi(x) - \pi(x/2) \geq \frac{\vartheta(x) - \vartheta(x/2)}{\log x}. \tag{3}$$

Ker po (1) sledi $\psi\left(\sqrt{x}\right) = \vartheta\left(x^{1/2}\right) + \vartheta\left(x^{1/4}\right) + \cdots$, imamo

$$\psi(x) - 2\psi\left(\sqrt{x}\right) = \vartheta(x) - \vartheta\left(x^{1/2}\right) + \vartheta\left(x^{1/3}\right) \mp \cdots .$$

Desna stran ni večja od $\vartheta(x)$, saj je ϑ naraščajoča funkcija. Upoštevamo še $\vartheta(x/2) \leq \psi(x/2)$ in dobimo

$$\vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) \geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\psi\left(\sqrt{x}\right). \tag{4}$$

Bistvo Ramanujanovega prispevka k dokazu Bertrandovega postulata je enostavnejša ocenitev desne strani neenakosti (4).

Ramanujanova ideja

Spomnimo se, da za binomski simbol $\binom{n}{m} = n!/(m!(n-m)!)$ velja simetrija $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. Binomski koeficienti $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ nastopajo v binomskem izreku

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n. \tag{5}$$

Lahko je videti, da je največji binomski koeficient $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, kjer je $\lfloor x \rfloor$ oznaka za celi del nenegativnega realnega števila x.

Ramanujan je za $x > 0$ uvedel funkcijo

$$R(x) = \frac{\lfloor x \rfloor!}{\lfloor x/2 \rfloor!^2}.$$

Po osnovnem izreku aritmetike, da lahko vsako naravno število $n \geq 2$ izrazimo kot produkt potenc praštevil, sledi $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$. Dobimo

$$\log \lfloor x \rfloor! = \sum_{n \leq x} \log n = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots,$$

kjer pri dokazu tretjega enačaja poleg upoštevanja (2) naredimo še sklep, da je vseh naravnih števil med 1 in x, deljivih z d, ravno $\lfloor x/d \rfloor$. Potem je

$$\log R(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) \mp \cdots. \tag{6}$$

Od tod že lahko slutimo, kako bomo to enakost uporabili pri neenakosti (4). Ker je tudi ψ naraščajoča funkcija, sklepamo

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \log R(x) \leq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right),$$

kar pomeni $\psi(x) - \psi(x/2) \geq \log R(x) - \psi(x/3)$ in

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{4}\right) - \psi\left(\frac{x}{8}\right)\right) + \cdots \\ &\leq \log\left(R(x)R\left(\frac{x}{2}\right)R\left(\frac{x}{4}\right)R\left(\frac{x}{8}\right)\cdots\right).\end{aligned}$$

Označimo z $\overline{R}(x)$ produkt v oklepaju. Ko v to neenakost vstavimo $x/3$ in uporabimo prejšnjo neenakost, skupaj s (3) in (4) končno dobimo

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{1}{\log x}\left(\log R(x) - \log \overline{R}\left(\frac{x}{3}\right) - 2\log \overline{R}\left(\sqrt{x}\right)\right). \qquad (7)$$

Sedaj smo nalogo prevedli na iskanje primerne zgornje in spodnje meje za funkcijo $R(x)$. Ramanujan je na tem mestu uporabil zelo pomembno, toda neelementarno aproksimacijo fakultete

$$1 < \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} < e^{\frac{1}{12n}}, \qquad (8)$$

ki zagotavlja $\log R(x) < (3/4)x$ in $\log R(x) > (2/3)x$ za $x > 300$. Neenakosti (8) sledita iz Stirlingove formule za funkcijo gama, glej [1, str. 204]. Zaključil je, da tedaj velja

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{\log x}\left(\frac{x}{6} - 3\sqrt{x}\right), \qquad (9)$$

saj je $\overline{R}(x) < e^{3x/2}$. Ker je za $x \geq 400$ desna stran večja od 1, je Bertrandov postulat nemudoma dokazan, vendar za ceno Stirlingove formule. V članku [6] je bilo pokazano, da lahko Ramanujanovi oceni nadomestimo s šibkejšima, toda elementarnima ocenama. To bomo kasneje tudi storili.

Na tem mestu je vredno omeniti, da je Ramanujan na koncu članka brez razlage napisal $\pi(x) - \pi(x/2) \geq 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ za vse $x \geq 2, 11, 17, 29, 41, \ldots$ Ta ugotovitev je vzpodbudila matematike za naslednjo definicijo: *za vsako naravno število n naj bo R_n najmanjše naravno število, za katerega velja $\pi(x) - \pi(x/2) \geq n$ za vse $x \geq R_n$.* Enostavno preverimo, da prvih pet Ramanujanovih števil ustreza tej definiciji. Opazimo še, da so vsa ta števila tudi praštevila. Po definiciji interval $(x/2, x]$ za vsak $x < R_n$ vsebuje največ

$n-1$ praštevil. Zato interval $(R_n/2, R_n]$ vsebuje natanko n praštevil, kar pomeni, da je R_n praštevilo. To dejstvo upravičuje izraz *Ramanujanova praštevila.*

Primerjava z ocenama Čebiševa in Pillaia

V tem razdelku bomo navedli oceni, ki ju dasta metodi Čebiševa in Pillaia. Dokazov zaradi obsežnosti ne moremo podati, bralec jih lahko poišče v [4] in [3, str. 71–75].

Čebišev je namesto funkcije $R(x)$ uporabljal

$$\frac{\lfloor x\rfloor ! \cdot \lfloor x/30\rfloor !}{\lfloor x/2\rfloor ! \cdot \lfloor x/3\rfloor ! \cdot \lfloor x/5\rfloor !}.$$

Iz njegovih spodnjih mej za $\vartheta(x)$ dobimo neenakost

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{\log x}\left(\frac{2A}{5}x - \frac{24-5\sqrt{2}}{10}A\sqrt{x}\right) - \frac{15}{8\log 6}\log x - \frac{5}{4}\left(3 + \frac{2\log 3}{\log 6}\right) - \frac{5}{4\log x}\left(4 + \frac{\log^2 2}{\log 6} - 2\log 2\right),$$

kjer je $A = \log\left(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}\right) - \log\sqrt[30]{30} \approx 0{,}9213$. Desna stran je za $x > 240$ pozitivna, za $x > 261$ pa večja od 1.

Pillai je sledil Ramanujanovemu dokazu in je zato študiral funkcijo $R(2n)$ za naravna števila n, vendar se je želel izogniti aproksimaciji (8). Zato je na elementaren način pokazal, da velja $2^{2n-1}/\sqrt{n} < R(2n) < 2^{2n}/\sqrt{2n}$ za $n \geq 2$. S skrbnim ocenjevanjem mu je za $n \geq 32$ uspelo dokazati neenakost

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{\log 2}{\log 2n}\left(\frac{2n}{3} - 1\right) - \left(\frac{\sqrt{2n}+1}{2}\right)\frac{\log n}{\log 2n}.$$

Desna stran je za $n \geq 45$ pozitivna, za $n \geq 74$ pa večja od 1.

Obe neenakosti sta boljši od Ramanujanove ocene (9), vendar dokaza v primerjavi z njegovim pristopom nista tako enostavna in pregledna, še zlasti ker lahko Stirlingovo formulo povsem zaobidemo. Čeprav pri tem dobimo slabšo oceno, je ta vseeno dovolj dobra za enostaven dokaz Bertrandovega postulata.

Meji za funkcijo $R(x)$

Funkcijo $R(x)$ bomo za $x \geq 3$ izrazili glede na sodost in lihost števila $\lfloor x \rfloor$. Brez težav izračunamo $R(x) = \binom{2k}{k}$ za $\lfloor x \rfloor = 2k$ in $R(x) = \binom{2k+1}{k}(k+1)$ za $\lfloor x \rfloor = 2k+1$. Po binomski formuli za $x = y = 1$ sledi neenakost $\binom{n}{m} \leq 2^n$ za vse $0 \leq m \leq n$. V nadaljevanju naj bo $n \geq 2$. Če je n lih, velja $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$. Torej imamo v tem primeru dva največja binomska koeficienta. Zato za lih n velja neenakost $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^{n-1}$. Ker je $\binom{n}{0} + \binom{n}{n} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ in $\binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, sledi

$$\frac{2^n}{n} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

S temi elementarnimi neenakostmi dobimo $\frac{2^{2k}}{2k} \leq R(x) \leq 2^{2k}$ za $\lfloor x \rfloor = 2k$ in $(k+1)\frac{2^{2k+1}}{2k+1} \leq R(x) \leq (k+1)2^{2k}$ za $\lfloor x \rfloor = 2k+1$. Po primerjanju vseh neenakosti imamo

$$\begin{aligned} \frac{2^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor} = \min\left\{ \frac{2^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor}, \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{2\lfloor x \rfloor} 2^{\lfloor x \rfloor} \right\} \leq R(x) \leq \max\left\{ 2^{\lfloor x \rfloor}, \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{2} 2^{\lfloor x \rfloor - 1} \right\} \\ = (\lfloor x \rfloor + 1)\, 2^{\lfloor x \rfloor - 2}. \end{aligned}$$

Če upoštevamo $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, dobimo

$$\frac{2^{x-1}}{x} \leq R(x) \leq (x+1)\, 2^{x-2}. \tag{10}$$

Enostavno preverimo, da velja $(x+1)2^{x-2} \leq x2^{x-1}$ in $x/2 < (3/2)^{x/2}$. Torej je $x2^{x-1} < 6^{x/2}$ in s tem $R(x) < 6^{x/2}$. Od tod dobimo

$$\overline{R}(x) < 6^{x/2 + x/4 + x/8 + \cdots} \leq 6^x. \tag{11}$$

Sedaj je jasno, da bomo v (7) uporabili (11) in levo neenakost v (10).

Dokaz

Po uporabi ocen iz prejšnjega razdelka na (7) dobimo

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{\log x}\left(\frac{x}{3}\log\frac{4}{3} - 2\sqrt{x}\log 6 - \log 2x\right)$$

za $x \geq 3$. Označimo s $f(x)$ funkcijo v oklepaju. Ker za $x \geq 2$ velja $\sqrt{x} \leq x/\sqrt{2} < 5x/7$ in $\log x < x$, s pomočjo žepnega računala dobimo

$$\begin{aligned} f\left(10^3 x\right) &= \left(\frac{10^3}{3}\log\frac{4}{3}\right)x - \left(20\sqrt{10}\log 6\right)\sqrt{x} - \log\left(2\cdot 10^3\right) - \log x \\ &\approx 95{,}894x - 113{,}321\sqrt{x} - 7{,}601 - \log x > 13{,}91x - 7{,}601 \end{aligned}$$

in s tem

$$\pi\left(10^3 x\right) - \pi\left(\frac{10^3 x}{2}\right) > \frac{13{,}91x - 7{,}601}{x + 6{,}908}.$$

Torej je $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ za $x \geq 2000$, kar pa že pomeni pravilnost Bertrandovega postulata.

Verjetno je marsikoga zmotila »nerigorozna« uporaba računala v prejšnjih vrsticah. In prav je tako, saj mora biti matematik v strogih dokazih neodvisen od računskih pripomočkov, čeprav nam ti velikokrat pokažejo pravo pot. Za zaključek razdelka je podan strog dokaz, kjer privzamemo na znanje le naslednjo potenčno vrsto

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots, \tag{12}$$

veljavno za $x \in (-1, 1]$.

Z uporabo substitucije $x \to 1/x - 1$ preoblikujemo (12) v enakost

$$\log x = \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \cdots,$$

ki je veljavna za $x \geq 1/2$. To vrsto uporabimo pri oceni spodnje in zgornje meje za logaritem. Za spodnjo mejo upoštevamo prve tri člene v vrsti, za zgornjo pa preostale člene zamenjamo z ustrezno geometrijsko vrsto. Dobimo

$$\frac{(x-1)\left(11x^2 - 7x + 2\right)}{6x^3} < \log x < \frac{(x-1)\left(3x^3 + 13x^2 - 5x + 1\right)}{12x^3}.$$

Ti oceni nam dasta $\log(4/3) > 55/192$, $\log 6 = \log 2 + \log 3 < 4753/2592$, $\log 1000 = 3(\log 2 + \log 5) < 30007/4000$ in $\log 2000 = 4\log 2 + 3\log 5 <$

24599/3000. Kot prej naj bo $x \geq 2$. Če upoštevamo še $\sqrt{10} < 16/5$, $\log x < x$ in $\sqrt{x} < 5x/7$, dobimo

$$f\left(10^3 x\right) > \frac{6907}{648}x - \frac{24599}{3000}.$$

Od tod sledi

$$\pi\left(10^3 x\right) - \pi\left(\frac{10^3 x}{2}\right) > \frac{4}{81}\frac{863375x - 664173}{4000x + 30007},$$

kar znova pomeni $\pi(x) - \pi(x/2) > 1$ za $x \geq 2000$.

Kako naprej?

Problemi teorije števil, v katere spada Bertrandov postulat, sprašujejo po intervalih z vsaj enim praštevilom. Veliko matematikov je zastavilo razna vprašanja na to temo, ki jih v glavnem zaokroža *Oppermannova domneva*. Kot je navada v teoriji števil, imajo vsi ti problemi enostavno formulacijo, zares pa je znanega le malo.

Danski matematik **Ludvig Henrik Ferdinand Oppermann** (1817–1883) je leta 1882 postavil domnevo, da za vsako naravno število $n \geq 2$ obstajata praštevili p in q, za kateri velja $n(n-1) < p < n^2$ in $n^2 < q < n(n+1)$. Od tod takoj sledi, da vedno obstaja praštevilo med zaporednima popolnima kvadratoma, kar je vsebina slavne *Legendrove domneve*, ki jo je zastavil francoski matematik **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833).

Razliko med zaporednima praštevilomaimenujemo *praštevilska vrzel*. V zvezi z Oppermannovo domnevo se lahko vprašamo po zgornjih mejah za praštevilske vrzeli. Naj bodo $p_1, p_2, \ldots$ zaporedna praštevila. Bertrandov postulat zagotavlja obstoj praštevila na intervalu $(p_n, 2p_n - 2)$ za vse $n \geq 3$, od koder sledi $p_{n+1} - p_n < p_n - 2$ za $n \geq 3$. Bi veljavnost Oppermannove domneve to oceno kaj izboljšala? Tvorimo množico

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\left(n(n-1), n^2\right) \cup \left(n^2, n(n+1)\right)\right) = (2,4) \cup (4,6) \cup (6,9) \cup (9,12) \cup \cdots.$$

Opazimo, da za vsak $n \geq 2$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $p_n \in \left(k^2 - k, k^2\right)$ ali $p_n \in \left(k^2, k^2 + k\right)$. Po Oppermannovi domnevi imamo v prvem primeru $p_{n+1} < k^2 + k$, v drugem pa $p_{n+1} < (k+1)^2$. Najprej obravnavajmo prvi primer. Ker je tedaj $(k - 1/2)^2 = k^2 - k + 1/4 < p_n$, sledi $k < 1/2 + \sqrt{p_n}$ in s tem $p_{n+1} - p_n < 2k < 1 + 2\sqrt{p_n}$. V drugem primeru pa imamo $k < \sqrt{p_n}$ in tako ponovno $p_{n+1} - p_n < 2k + 1 < 1 + 2\sqrt{p_n}$. Ker slednje velja tudi za $n = 1$, Oppermannova domneva implicira

$$p_{n+1} - p_n < 1 + 2\sqrt{p_n}, \quad n \geq 1, \tag{13}$$

kar je znano kot *Andricajeva domneva* (1986). Ta domneva je ekvivalentna trditvi

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1, \quad n \geq 1. \tag{14}$$

Slednje je ekvivalentno neenakosti $p_{n+1} - p_n < \sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}$, torej iz (14) sledi (13). Obrat pokažemo tako, da iz nepravilnosti (14) sklepamo o nepravilnosti (13).

Ocena (13) je boljša od tiste, ki jo da Bertrandov postulat, ni pa zadnje, kar matematiki verjamejo, da je res. *Cramérjeva domneva* (1936) zagotavlja celo $p_{n+1} - p_n \leq C \log^2 p_n$ za neko konstanto $C > 0$. Švedski matematik **Harald Cramér** (1893–1985) je na začetku matematične kariere naredil pionirsko delo na področju uporabe teorije verjetnosti v teoriji števil, kasneje pa se je ukvarjal tudi z aktuarsko in finančno matematiko. Temelji za domnevo so v *Riemannovi hipotezi*, enem izmed najslavnejših odprtih problemov v matematiki, saj je Cramér leta 1920 dokazal, da njena pravilnost zagotavlja $p_{n+1} - p_n \leq C\sqrt{p_n} \log p_n$. Neodvisno od katerekoli domneve so znane šibkejše ocene oblike $p_{n+1} - p_n \leq C p_n^{1/2+\varepsilon}$, kjer poskušajo najti čim manjše vrednosti $\varepsilon > 0$. Baker, Harman in Pintz so leta 2001 dokazali veljavnost prejšnje neenakosti za $\varepsilon = 0{,}025$, glej knjigo [5, str. 32].

Omenimo še, da obstajajo tudi razne domneve o porazdelitvi elementov množice $\{p_{n+1} - p_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, ki so vedno soda števila, le prvi element

je 1. Naj bo $P_k(n)$ število elementov množice $\{i < n \colon p_{i+1} - p_i = k\}$. Definirajmo še

$$C_2 := \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 0{,}66016.$$

Zelo splošno domnevo o asimptotiki funkcije $P_k(n)$ za soda števila k sta postavila Hardy in J. E. Littlewood:

$$P_k(n) \sim \frac{2C_2 n}{\log^2 n} \prod_{p \mid k, p \geq 3} \frac{p-1}{p-2}$$

če k ni potenca števila 2, ter $P_k(n) \sim 2C_2 n / \log^2 n$ sicer. Trivialna posledica te domneve je $\lim_{n\to\infty} P_k(n) = \infty$ za vsako sodo število k. V primeru $k = 2$ domneva govori o porazdelitvi *praštevilskih dvojčkov* in še vedno ni znano, ali jih je res neskončno. Yitang Zhang je leta 2014 dokazal obstoj števila k_0, da je $\lim_{n\to\infty} P_{k_0}(n) = \infty$, pri čemer je eksplicitno podal le precej veliko zgornjo mejo za število k_0. Matematiki poskušajo nadgraditi Zhangovo metodo v upanju, da bi rešili domnevo o neskončnem številu praštevilskih dvojčkov. Obetavne rezultate je dal *Project Polymath*, spletni forum za reševanje pomembnih in težkih matematičnih problemov s področja teorije števil in diskretne matematike.

LITERATURA

[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

[2] M. Aigner in G. M. Ziegler, *Proofs from The Book*, 5th ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.

[3] K. Chandrasekharan, *Introduction to analytic number theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 148, Springer-Verlag, New York, 1968.

[4] P. L. Čebišev, *Mémoire sur les nombres premiers*, J. Math. Pures Appl. **17** (1852), 366–390.

[5] R. K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, 3rd ed., Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2004.

[6] J. Meher in M. Ram Murty, *Ramanujan's proof of Bertrand's postulate*, Amer. Math. Monthly **120** (2013), 650–653.

[7] S. S. Pillai, *Collected works of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Volumes I&II, Ramanujan Mathematical Society, Mysore, 2010.

[8] S. Ramanujan, *A proof of Bertrand's postulate*, J. Indian Math. Soc. **11** (1919), 181–182.

O ENAČBI KORTEWEG-DE VRIES

TIMOTEJ LEMUT

Fakulteta za matematiko in fiziko,
Univerza v Ljubljani

PACS: 47.35.Fg

V članku opišemo izpeljavo enačbe KdV iz osnovnih hidrodinamskih enačb in prikažemo reševanje enačbe ob predpostavki potujočega vala, najprej za lokalizirano, nato pa še za periodično rešitev.

ON THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

We derive the KdV equation from the basic equations of hydrodynamics and solve the equation under the assumption of a traveling wave, first in the case of localized solution and then in the case of periodical solution.

Uvod

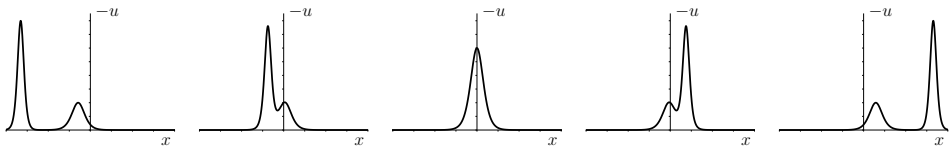
Enačbo Korteweg-de Vries (KdV) za neznano funkcijo u, spremenljivk x in t, zapišemo kot

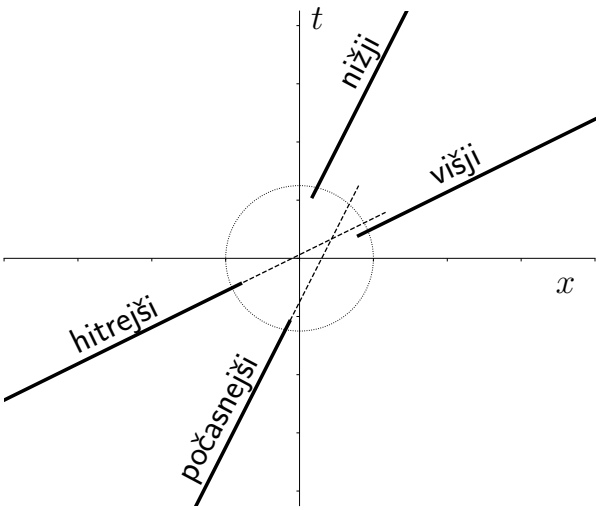
$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

kjer podpisana koordinata predstavlja parcialni odvod. Zgornjo enačbo je leta 1877 prvi zapisal Joseph Valentin Boussinesq, 1895 pa še Diederik Korteweg in Gustav de Vries. Vsi trije so študirali valove v plitvi vodi, pojasniti pa so hoteli zanimiv pojav potujočega vala na vodni površini, ki ob potovanju po kanalu/rečni strugi ohranja svojo obliko, za razliko od običajnega vala, katerega oblika se sčasoma razleze ali pa se zlomi.

Pojav je pred tem v kanalu Union med Falkirkom in Edinburghom leta 1834 prvi opazil škotski inženir John Scott Russell in ga potem tudi poustvaril v za to zgrajenem kanalu. Val, ki ohranja obliko, je imenoval translacijski val, poleg tega pa je izmeril, da je hitrost vala sorazmerna njegovi višini. Dodatna presenečenja so sledila pri eksperimentih z več translacijskimi valovi. Translacijski valovi ne interagirajo, temveč v nespremenjeni obliki zapustijo trk. Interakcija med valovi se razkrije le z zamikom glede na položaj, ki bi ga val imel, če bi se gibal s konstantno hitrostjo. Kasneje se je takih in podobnih valov prijelo tudi ime solitonski valovi oziroma krajše solitoni.

Na spodnji sliki je prikazan primer trka dveh solitonskih valov v primeru, ko hitrejši (večji) dohiti počasnejšega (manjšega), kjer lepo vidimo zamik v položajih po trku.



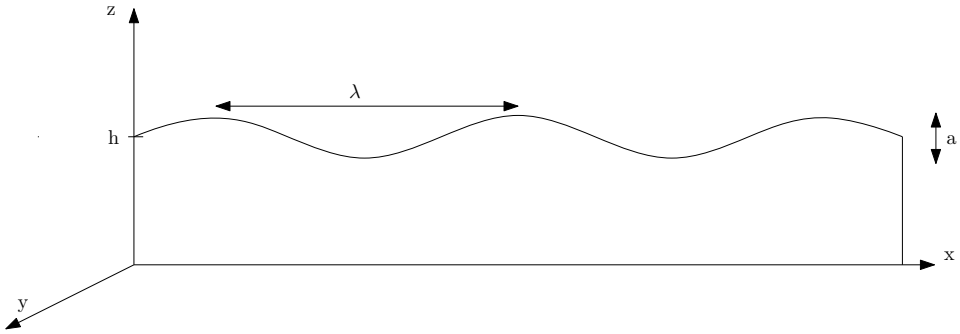


Slika 1. Primer trka dveh solitonskih valov. Na zgornjih slikah sta prikazana solitonska vala ob nekaj različnih časih pred trkom in po njem, na spodnjem delu pa položaj obeh valov v odvisnosti od časa.

V članku si ogledamo izpeljavo in osnovne rešitve enačbe KdV. V drugem poglavju opišemo izpeljavo iz osnovnih enačb hidrodinamike, v tretjem poglavju pa izpeljemo rešitev za solitonski val in opišemo njemu sorodno periodično rešitev, t. i. cnoidni val.

Izpeljava enačbe KdV

Obravnavamo ravninski val z valovno dolžino λ, ki je veliko večja od globine mirujoče tekočine h. Poleg $\lambda \gg h$ naj velja še $a \ll h$, kjer je a amplituda valovanja. Val z označenimi količinami in koordinatnimi osmi je prikazan na spodnji sliki. Če majhne parametre, ki se bodo pojavili pri opisu dolgovalovnih valov v plitvi vodi, povsem zanemarimo, dobimo za odmik gladine od ravnovesne višine valovno enačbo. Izkaže se, da je enačba KdV naslednja v razvoju po malih količinah, ki jih srečamo pri opisu takih valov. Začnemo



Slika 2. Obravnavan ravninski val z označenimi osmi in relevantnimi parametri h, λ in a.

z osnovnimi enačbami hidrodinamike. Veljata ohranitvi mase in gibalne količine,

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{2}$$

$$\rho \left(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}, \tag{3}$$

kjer je ρ gostota tekočine, $\mathbf{v}$ hitrost, p tlak, $\mathbf{f}$ pa označuje zunanje sile. Dalje predpostavimo, da je tekočina nestisljiva in brezvrtinčna,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Druga predpostavka nam dovoli, da hitrost opišemo s potencialom ϕ, tako da je $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Skupaj z zahtevo po nestisljivosti iz enačbe (2) sledi

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{4}$$

V tem približku določa hitrostni potencial samo robni pogoj, hkrati pa mora rešitev ustrezati še enačbi (3). Robni pogoj za hitrostni potencial sledi iz zahteve, da je na meji med tekočino in dnom hitrost tekočine lahko samo tangentna na mejo. Tako pri $z = 0$ velja $\phi_z = 0$. Površino vala opišemo s funkcijo $z = h + \eta(x,t)$, tako da na površju velja $\phi_z = \eta_t + \eta_x\phi_x$.

Enačba (3) mora veljati tudi na površju, kjer je tlak enak nič. Za zunanjo silo $\mathbf{f}$ vstavimo gravitacijsko silo $\mathbf{f} = -\rho g\mathbf{e}_z$. Upoštevamo še identiteto $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})$ in dobimo

$$\phi_t + \tfrac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0, \quad \text{pri} \quad z = h + \eta(x,t), \tag{5}$$

kjer smo irelevanten konstantni člen gh kar izpustili.

Enačbi (4) in (5) torej opisujeta gibanje nestisljive tekočine na brezvrtinčen način. Upoštevaje, da je tako gibanje možno v dolgih plitvih valovih, lahko problem v nadaljnjem preoblikujemo v enačbo KdV. Vpeljemo brezdimenzijske koordinate, čas in potencial:

$$x \to \frac{x}{\lambda}, \quad z \to \frac{z}{h}, \quad t \to \frac{t\sqrt{gh}}{\lambda}, \quad \eta \to \frac{\eta}{a}, \quad \phi \to \frac{h\phi}{a\lambda\sqrt{gh}}.$$

Laplaceova enačba tako postane:

$$\delta\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0,$$

robni pogoji pa so:

$$\text{pri} \quad z = 1 + \epsilon\eta: \quad \phi_z = \delta(\eta_t + \epsilon\eta_x\phi_x) \quad \text{in} \tag{6}$$

$$\phi_t + \tfrac{1}{2}\epsilon(\phi_x^2 + \tfrac{1}{\delta}\phi_z^2) + \eta = 0 \tag{7}$$

$$\text{pri} \quad z = 0: \quad \phi_z = 0. \tag{8}$$

V zgornjih enačbah se pojavita dva brezdimenzijska parametra

$$\delta = (h/\lambda)^2 \quad \text{in} \quad \epsilon = a/h,$$

ki sta po predpostavki oba majhna.

Hitrostni potencial razvijemo okoli $z = 0$ in ga z upoštevanjem Laplaceove enačbe (4) zapišemo v obliki:

$$\phi(x,z,t) = f - \delta\frac{z^2}{2}f_{xx} + \delta^2\frac{z^4}{24}f_{xxxx} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-\delta)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\partial_x^{2n}f, \tag{9}$$

kjer je $f(x,t) := \phi(x,0,t)$ hitrostni potencial pri $z = 0$.

Prepričajmo se najprej, da v primeru, ko ϵ in δ povsem zanemarimo, res dobimo valovno enačbo. Razvoj (9) vstavimo v robna pogoja na gladini (6) in (7) ter ohranimo količine, v katerih ϵ in δ ne nastopata. Dobimo enačbi $f_{xx} + \eta_t = 0$ in $f_t + \eta = 0$, ki ju lahko preoblikujemo v valovno enačbo z enako brezdimenzijsko hitrostjo tako za f_x kot tudi η. Pri razvoju do ničtega reda v ϵ in δ torej velja

$$f_x = \eta \quad \text{in} \tag{10}$$

$$\eta_x + \eta_t = 0. \tag{11}$$

Za odmik gladine od ravnovesne višine η smo res dobili valovno enačbo (11). Zaradi (10) pri razvoju do naslednjega reda v ϵ oziroma δ uporabimo nastavek

$$f_x = \eta + \epsilon F(x,t) + \delta G(x,t), \tag{12}$$

za neki funkciji F in G. Iz razvoja do ničtega reda sledi še, da se odvoda po kraju in po času funkcije η oziroma f_x razlikujeta šele v prvem redu ϵ in δ. Tako za funkciji F in G, ki vedno nastopata skupaj z ϵ oziroma δ, v prvem redu velja $F_x = -F_t$ in $G_x = -G_t$.

Sedaj zapišemo enačbi robnega pogoja na gladini (6) in (7) do prvega reda v ϵ in δ. Drugo enačbo robnega pogoja (7) še odvajamo po x, tako da lahko uporabimo nastavek (12), s katerim se znebimo f_x. Dobimo dve enačbi

$$\eta_x + \epsilon F_x + \delta G_x + \eta_t = \frac{\delta}{6}\eta_{xxx} - 2\epsilon\eta\eta_x \tag{13}$$

$$\eta_x + \eta_t + \epsilon F_t + \delta G_t = \frac{\delta}{2}\eta_{xxt} - \epsilon\eta\eta_x, \tag{14}$$

kjer zapisujemo le člene do prvega reda v ϵ in δ. Zgornji enačbi odštejemo in ker parametra ϵ in δ nastopata neodvisno, dobimo dve enačbi, eno za F in eno za G. Upoštevamo še zvezo med odvodom po kraju in po času in tako dobimo izraza za vsako od funkcij: $F = -\frac{1}{4}\eta^2$ in $G = \frac{1}{3}\eta_{xx}$, ki ju uporabimo v eni od enačb (13) oziroma (14) in dobimo enačbo KdV za $\eta(x,t)$, odmik gladine od ravnovesne višine,

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3\epsilon}{2}\eta\eta_x + \frac{\delta}{6}\eta_{xxx} = 0.$$

Zgornjo enačbo lahko preoblikujemo v (1), tako da se z $x \to x - t$ najprej premaknemo v drug koordinatni sistem in se s tem znebimo člena s prvim odvodom po x, nato pa še spremenimo koeficiente pred posameznimi členi s skaliranjem $\eta \to -\frac{2\delta}{3\epsilon}\eta$ in $t \to \frac{6}{\delta}t$.

Rešitve enačbe KdV

Nizozemska matematika sta v svojem članku zapisala tudi rešitev enačbe KdV, ki opisuje solitonski val, ter periodično rešitev, ki sta jo poimenovala cnoidni val.

Obe rešitvi dobimo z nastavkom za potujoči val, $u(x,t) = f(x - ct)$. Enačba KdV (1) tako postane

$$-cf' + f''' - 3(f^2)' = 0,$$

kjer opuščaj nakazuje na odvod po spremenljivki $\xi = x - ct$. Po enkratni integraciji po ξ ter nato še eni integraciji po ξ z integrirajočim faktorjem f' dobimo izraz

$$\frac{1}{2}(f')^2 = F(f), \tag{15}$$

kjer smo označili $F(f) = A + Bf + \frac{1}{2}cf^2 + f^3$.

V primeru, da iščemo lokalizirano rešitev, postavimo A in B na nič, saj morajo $f, f', f'' \to 0$ za $|\xi| \to \infty$. Zgornjo enačbo nato še enkrat integriramo po ξ in dobimo

$$f(\xi) = -\frac{c}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0)\right)}, \tag{16}$$

kjer je x_0 poljubna integracijska konstanta, predstavlja pa položaj vala ob času $t = 0$. Dobili smo izraz za solitonski val, ki ga je proučeval Russell. Kot vidimo, ima hitrejši val res večjo amplitudo. S takim nastavkom lahko opišemo le en lokaliziran val. Za rešitev, ki bi na primer opisala trk dveh takih valov, bi bilo treba že pri začetnem nastavku ubrati drugačen pristop.

V primeru, da pri zgornjem nastavku ne zahtevamo lokaliziranega potujočega vala, ampak le to, da je rešitev omejena, moramo natančneje proučiti funkcijo $F(f)$. Najprej opazimo, da vrednosti konstant A in B določata položaj ničel, neodvisno od njiju pa velja $F \to \pm\infty$, ko $f \to \pm\infty$. Glede na

število in relativen položaj ničel imamo tako 6 različnih možnosti za $F(f)$. Če si jih narišemo, lahko sklepamo, da mora imeti za periodično rešitev funkcija $F(f)$ tri realne ničle, ki jih označimo od največje do najmanjše s $f_1 > f_2 > f_3$. Zgornja enačba (15) je tako enaka

$$\frac{1}{2}(f')^2 = (f - f_1)(f - f_2)(f - f_3). \tag{17}$$

Za f uporabimo nastavek $f = f_3 + (f_2 - f_3)\sin^2\theta$, enačba pa postane

$$(\theta')^2 = \frac{f_1 - f_3}{2}\left(1 - \frac{f_2 - f_3}{f_1 - f_3}\sin^2\theta\right).$$

Sedaj ločimo spremenljivki in pointegriramo obe strani enačbe

$$\int_{\xi_3}^{\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta'}},$$

kjer smo označili $l = \frac{f_1 - f_3}{2}$ in $m = \frac{f_2 - f_3}{f_1 - f_3}$, število ξ_3 pa je določeno prek $f(\xi = \xi_3) = f(\theta = 0) = f_3$. Zgornji izraz po definiciji Jacobijeve eliptične funkcije sinus amplitudinis implicira, da je $\mathrm{sn}\left((\xi - \xi_3)\sqrt{l}, m\right) = \sin\theta$, oziroma, končna rešitev je

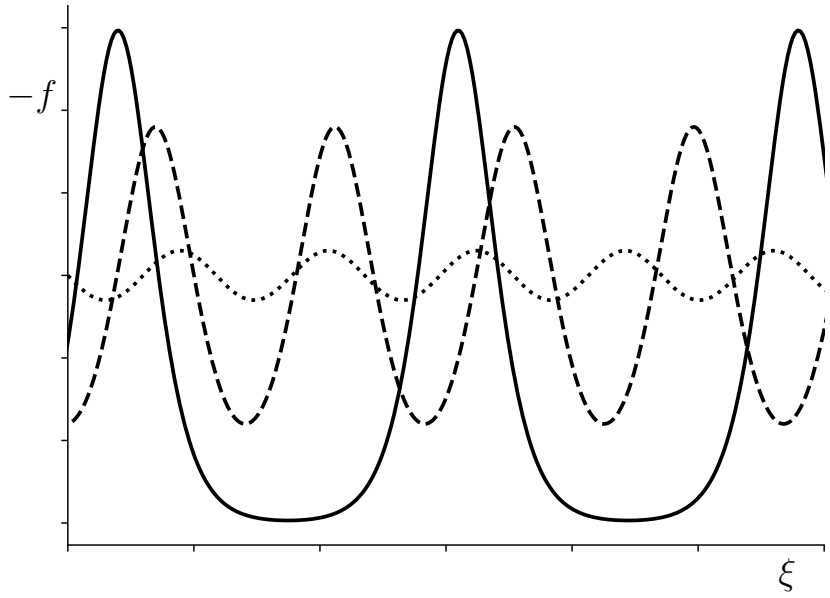
$$f(\xi) = f_3 + (f_2 - f_3)\ \mathrm{sn}^2\left((\xi - \xi_3)\sqrt{l},\ m\right).$$

Ker je $\mathrm{sn}(u, m) \in [0, 1]$ za poljuben u, se rešitev giblje med f_3 in f_2, tako da bi lahko za amplitudo vala vzeli količino $\frac{f_2 - f_3}{2}$, za ravnovesno globino pa $h = \frac{f_2 + f_3}{2}$. S primerjavo enačb (15) in (17) lahko izluščimo še hitrost valovanja c v odvisnosti od ničel funkcije F, in sicer dobimo $c = -2(f_1 + f_2 + f_3)$.

Na spodnji sliki so prikazane tri rešitve za različne m, pri istem l in isti globini h, kjer za $m \to 1$ dobimo ravno lokalizirano rešitev (16), medtem ko limita $m \to 0$ (oziroma $f_3 \to f_2$) predstavlja rešitev linearizirane enačbe KdV

$$u_t - 6f_2u_x + u_{xxx} = 0.$$

S pomočjo nastavka potujočega vala smo poiskali omejeno periodično rešitev in v posebnem tudi lokaliziran solitonski val, ki ohranja obliko pri



Slika 3. Periodične rešitve enačbe KdV izražene s funkcijo sn, pri isti globini h in istem l za vrednosti $m = 0{,}1, 0{,}6$ in 0,99 označene s pikčasto, črtkano in polno črto. Na grafu prikazujemo vrednost $-f$.

potovanju in katerega hitrost je res sorazmerna višini. Ostane nam le še pokazati, da dva taka vala ohranita obliko tudi po trku. Rešitev, ki opisuje trk dveh solitonov, pa ne ustreza nastavku potujočega vala, zato moramo za iskanje novih rešitev uporabiti kakšno bolj splošno metodo reševanja enačbe KdV.

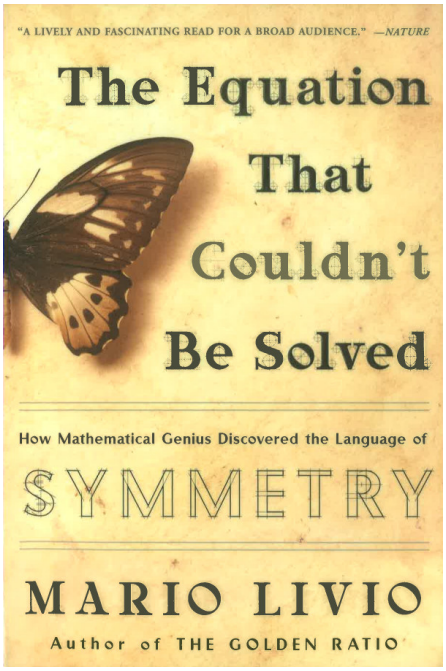
LITERATURA

[1] J. S. Russell, *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-+43*, R. and J. Taylor, 1845.

[2] R. S. Johnson, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] P. G. Drazin in R. S. Johnson, *Solitons: An introduction*, Cambridge university press, Cambridge, 1989.

Mario Livio, The Equation That Couldn't Be Solved, Simon & Schuster Paperbacks, 2005, 353 strani.



Privlačno napisana knjiga poljudnoznanstvene narave o pojmu simetrije obravnava razne konkretne aspekte tega sicer abstraktnega pojma in bralcu predstavi zgodovinski razvoj ustrezne matematične formulacije preko iskanja rešitev polinomskih enačb. Ker se bolj osredotoča na zgodovinsko-biografski vidik kot pa na matematično vsebino, je zelo dostopna tudi humanistično usmerjenim bralcem, ki bi radi posegli po idejah iz matematičnega sveta, ne zanimajo pa jih tehnične podrobnosti. Po drugi strani pa je namenjena tudi naravoslovno usmerjenim bralcem, ki samo matematično vsebino knjige sicer že dobro poznajo, radi pa bi izvedeli več o širšem zgodovinskem ozadju nastanka s pojmom simetrije povezanih matematičnih idej in teorij.

Knjiga je posvečena enemu od mejnikov v zgodovini matematike, odkritju in hkrati že tudi prvi uporabi pojma *grupe*, ki predstavlja eno najpomembnejših matematičnih struktur. *Teorija grup* je danes nepogrešljiva ne samo v matematiki, temveč tudi v drugih znanostih, npr. fiziki in kemiji. Na grupe naletimo tudi v umetnosti (npr. grupe periodičnih tlakovanj ravnine), praktično povsod, kjer tako ali drugače nastopajo simetrije. Grupe so »naravni jezik« za proučevanje simetrij.

Do odkritja tako pomembnih in široko uporabnih struktur pa ni prišlo tako, da bi se matematiki zavestno trudili iznajti neko novo in čim širše uporabno matematično teorijo, temveč nekako mimogrede, ko so se ubadali s problemom iskanja splošne algebraične formule za enačbe 5. stopnje, kar je bil dolgo eden izmed velikih nerešenih problemov matematike.

Potem ko je matematikom v renesansi z bistroumnimi ad hoc metodami uspelo najti splošne algebraične formule za rešitve enačbe 3. in 4. stopnje, ki so bile prvič objavljene leta 1545 v slavni Cardanovi knjigi »*Ars Magna*«, je bil naslednji cilj matematikov jasen: najti podobno algebraično formulo za rešitve splošne enačbe 5. stopnje $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$, ki naj bi iz realnih koeficientov a, b, c, d, e, f takšne enačbe samo z osnovnimi operacijami – seštevanjem, odštevanjem, množenjem, deljenjem in korenjenjem – pripeljala do vsaj ene rešitve x take enačbe.

Ker tega oreha dolgo nikomur ni uspelo streti, so nekateri matematiki začeli dvomiti, ali je sploh mogoče najti splošno rešitev za enačbe pete in višjih stopenj. Tako je npr. Gauss istega leta 1799, ko je v svoji doktorski disertaciji objavil svoj prvi (in nepopolni) dokaz osnovnega izreka algebre (po katerem ima vsaka enačba n-te stopnje natanko n rešitev, ki so realna ali kompleksna števila), zapisal: »Potem ko so napori mnogih geometrov pustili le malo upanja, da bi lahko rešili splošno enačbo algebraično, se zdi bolj in bolj verjetno, da je takšna rešitev nemogoča in protislovna.« Dodal je še: »Morda ne bo tako težko dokazati, z vso strogostjo, nemogočost za peto stopnjo.« Potem pa o tem nikoli ni objavil ničesar več.

Da splošna enačba 5. stopnje dejansko ni rešljiva algebraično, sta neodvisno drug od drugega pokazala norveški matematik Abel in francoski matematik Galois. V knjigi sta predstavljeni njuni tragični življenjski zgodbi (oba sta umrla mlada, Abel reven, Galois pa nerazumljen od sodobnikov), pa tudi bistvo njunih matematičnih odkritij v zvezi s tem problemom. Galois je prodrl globlje v njegovo razumevanje, saj je odkril in pojasnil razlog, zakaj problem ni rešljiv.[1] Vsaki enačbi je priredil neko permutacijsko grupo, pokazal, da je rešljivost enačbe z algebraično formulo odvisna od strukturnih lastnosti te grupe, pokazal pa je tudi, da obstajajo enačbe pete in višjih stopenj, katerih grupe ne dopuščajo take rešitve. To so tri ključne sestavine

[1] Problem nerešljivosti enačb pete in višjih stopenj s preprosto algebraično formulo je še eden od številnih slavnih problemov iz zgodovine matematike, ki jih ni bilo mogoče rešiti s predpisanimi sredstvi (spomnite se samo na tri slavne nerešene probleme starogrške matematike: *podvojitev kocke*, *tretjinjenje kota* in *kvadratura kroga*, ali pa na brezplodne poskuse dokazati peti Evklidov postulat). Takšni problemi praviloma dolgo ostajajo nerešeni, po določenem času pa matematiki začnejo iskati rešitve zunaj predpisanega okvira. Morda tudi sami poznate kakšen odprt matematičen problem, ki ga skoraj zagotovo ni mogoče rešiti z danimi sredstvi; vztrajanje, da ne smete ali ne morete uporabiti drugih orodij, vam v bistvu zveže roke. Morda pa vam ga uspe rešiti na kakšen drug način – tako da iznajdete neka druga sredstva za njegovo rešitev; tako je npr. Aleksander Veliki z mečem presekal gordijski vozel.

Galoisovega preboja pri reševanju problema, ki je dolgo ostajal nerešen.

Čeprav je bistvo Galoisovega dokaza mogoče opisati tudi na tako shematičen način, brez tehničnih podrobnosti, bo bolj matematično in zgodovinsko radovedni bralec zagotovo pogrešal natančnejšo razlago. V tem primeru lahko poseže npr. po Rotmanovi knjigi *Galois' Theory*, kjer bo poleg moderne različice Galoisove teorije v dodatku našel tudi njeno izvorno formulacijo ter dovolj natančen opis tega, kako je Galois prišel do svojega odkritja z navezavo na dela svojih predhodnikov in sodobnikov. So pa po drugi strani v knjigi lepo in s primeri razumljivo prikazane osnovne ideje, ki so pripeljale do začetkov teorije grup. Prav tako so dobro popisane dramatične podrobnosti iz življenja Galoisa in Abela; tako npr. bralec lahko izve, kako je Galois svojo teorijo v grobih obrisih skiciral v pismu prijatelju v noči pred usodnim dvobojem. Teorija grup danes dobiva nove in nove uporabe na najrazličnejših področjih, pa čeprav tega njen tvorec Galois niti najmanj ni pričakoval. Po njegovi smrti so matematiki potrebovali kar nekaj let, da so njegove zapiske iz tega pisma razvozlali in prepoznali njihovo vrednost.

Knjigo, katere jedro predstavlja prav Galoisovo odkritje grup, uvajajo poglavja o simetriji na splošno, npr. v naravi in umetnosti, zaključujejo pa poglavja o uporabi simetrije (in teorije grup) v moderni znanosti (npr. fiziki). V tem zadnjem delu knjiga bralca popelje razmeroma daleč proti obzorju moderne znanosti, ko npr. govori, do kako velikih odkritij so prišli fiziki z upoštevanjem načela, da morajo enačbe njihovih teorij ustrezati takšnim ali drugačnim simetrijam. Tako je npr. Einstein, ko je razvijal posebno teorijo relativnosti, odkril, da iz zahteve po simetriji fizikalnih zakonov za enakomerno gibajoče se opazovalce in iz invariantnosti svetlobne hitrosti sledi, da prostora in časa ni mogoče obravnavati kot ločenih entitet (str. 202).

Od knjige, katere cilj je predstavitev odkritja pojma grupe in njegove uporabe, seveda ne moremo zahtevati, da bi bralcu predstavila fizikalne teorije, ki v zadnjih desetletjih iščejo »veliko poenotenje« fizike in temeljijo na načelu, da morajo enačbe teorij biti simetrične. Kako zelo so te teorije zapletene, se lahko zainteresirani bralec prepriča npr. ob knjigi Michael Dine, *Supersymmetries and String Theory*, Cambridge University Press 2015. Po drugi strani pa nekateri fiziki že dopuščajo tudi možnost, da narava ni tako popolno simetrična, kot bi si to želeli. O tem lahko zainteresirani bralec izve več npr. v članku *What Does Beauty Have To Do With Physics?* `www.pbs.org/wgbh/nova/article/beauty-in-physics/`, datum ogleda 17. 3. 2019.

Pojem simetrije je veliko prebogat, da bi bilo v eni sami knjigi mogoče

zajeti vse njegove različne pojavne oblike v naravi, umetnosti in matematiki. Tako na primer v knjigi ni omenjena slavna Heronova formula za ploščino trikotnika, v kateri stranice a, b, c, nastopajo »simetrično«. Podobno vrsto simetrije najdemo tudi pri formuli $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ za rešitev kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$; to formulo lahko izrazimo kot simetrično funkcijo vsote x_1+x_2 in produkta x_1x_2 rešitev x_1 in x_2, in sicer takole: $\frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2) \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}\right]$. Francoz Alexandre-Théophile Vandermonde (1733–96) in Anglež Edward Waring (1736–98) sta se prva domislila vprašanja, ali je tudi enačbe pete stopnje in na splošno vseh stopenj mogoče izraziti s podobnimi simetričnimi izrazi, o tej ideji pa je razmišljal tudi Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), ki ga je Napoleon Bonaparte imenoval »vzvišena piramida matematičnih znanosti« (str. 83). Potreben pa je bil genij Galoisovega kova, ki je od tega preprostega uvida zmogel storiti velikanski korak naprej v neznano.

Čeprav je knjiga slogovno nekoliko heterogena – vsa poglavja niso napisana v enotnem stilu – se jo vsekakor splača prebrati, saj lepo predstavi začetke razvoja teorije grup. Ta prikaz je lahko vsakemu dijaku ali študentu matematike dobra začetna motivacija, da se resneje posveti temu pomembnemu področju matematike. Dostopna bo tudi humanistično usmerjenemu bralcu, ki bolj matematično zahtevnega dela ne bi mogel razumeti. Učitelj matematike pa bo ob njenem prebiranju dobil boljšo predstavo o tem, kje utegnejo dijaki ali študenti imeti težave z določenimi matematičnimi koncepti – te so po navadi podobne, kot so jih imeli matematiki v zgodovini, ko so te koncepte šele uvajali.

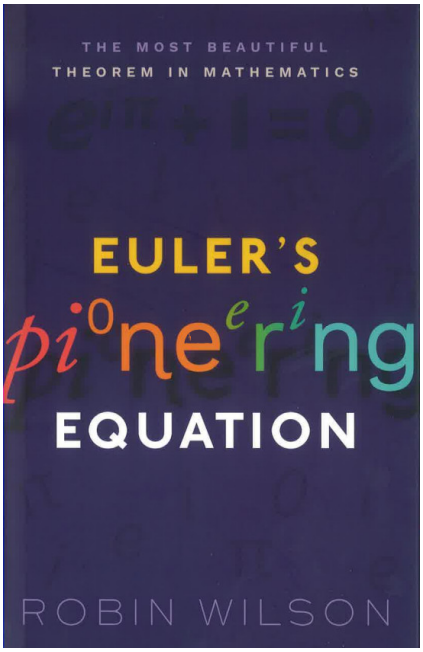
Jurij Kovič

Robin Wilson, Euler's Pioneering Equation, Oxford University Press, Oxford, 2018, 162 str.

»Eulerjeva pionirska enačba«

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

je zaradi svoje lepote in uporabnosti na številnih področjih matematike upravičeno deležna velike pozornosti matematikov vseh profilov, tako zgodovinarjev in popularizatorjev matematike kot tudi učiteljev in raziskovalcev.



Ker je o njej težko povedati kaj novega, mora vsakdo, ki želi danes pritegniti bralce s pisanjem o njej, toliko več pozornosti posvetiti izvirni kompoziciji knjige in zanimivemu slogu pisanja ter pregledni sintezi znanih dejstev. To je avtorju odlično uspelo. Odločil se je za bolj poljudno predstavitev Eulerjeve enačbe, v kateri je vsakemu od njenih »elementov« 1, 0, π, e in i namenjeno posebno poglavje. Ker so bili ti »elementi« deležni posebne pozornosti v različnih obdobjih, je knjiga, ki jih bralcu predstavi v širšem matematičnem in kulturno-zgodovinskem kontekstu, privlačna tudi kot kratek pregled izbranih tem iz zgodovine matematike.

Zadnje, matematično najzanimivejše poglavje v knjigi je posvečeno sami Eulerjevi enačbi. Začne se z Eulerjevo identiteto

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

iz leta 1748, ki povezuje eksponentno funkcijo in trigonometrijske funkcije. Ta identiteta je v knjigi izpeljana iz De Moivrovega izreka o potenciranju kompleksnih števil, ki pove, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Iz Eulerjeve enačbe hitro sledi, da je vsota korenov enote, tj. rešitev enačbe

$$z^n = 1,$$

enaka nič za vsako naravno število $n \geq 2$. Poglavje se konča z razlago, kaj sploh pomeni, da imajo $\ln i$, i^i in $\sqrt[i]{i}$ »neskončno mnogo vrednosti«.

Avtor pojasni tudi, zakaj je za Eulerja primerno ime pionir (angl. »pioneer«) – ker se v črkah te besede skrivajo vse konstante iz Eulerjeve enačbe!

Jurij Kovič

IZ ZGODOVINE

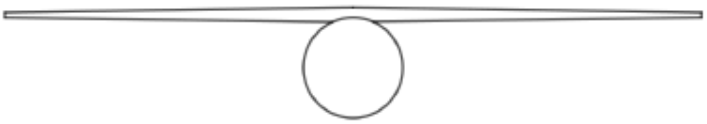
Zanimiva knjiga o mehaniki in nekaj spominov na profesorja Kuhlja

Knjiga **J. E. Gordon, Structures or Why things don't fall down** [1] je bila prvič izdana leta 1978 v Londonu, zadnjič ponatisnjena leta 2003, a je še vedno aktualna. Je tudi cenovno dostopna. Prevedena je bila v številne jezike. V njej je na razumljiv in večkrat humoren način prikazanih ogromno zanimivih dejstev o razvoju in uporabi mehanike. Njen avtor James Edward Gordon (1913–1998) je bil eden od pionirjev znanosti o mehaniki materialov. Na Univerzi v Glagowu je diplomiral s področja ladjedelništva in bil sprva zaposlen kot ladijski konstruktor. Med drugo svetovno vojno je delal na področju letalstva, kjer je pomagal razvijati kompozitne materiale. Od leta 1968 je bil profesor na Univerzi v Readingu.

Ob branju sem se spomnil na svoja študijska leta. Kot slušatelj *Tehnične matematike* sem v letih 1969–71 imel dva obširna celoletna predmeta: *Mehaniko* in *Višjo tehnično mehaniko*. Predaval je akademik Anton Kuhelj (1902–1980); vaje je imel prijazni Peter Vencelj (1939–2017). Že v osnovni šoli sem bral Kuhljevi poljudno napisani knjigi *Tehnika v vsakdanjem življenju I in II*, ki sta izšli pri Mohorjevi družbi 1960 in 1962. Deli sta bili zanimivi, razumljivi in lepo napisani.

V drugem letu mojega študija je profesor Kuhelj dvakrat na teden matematikom in fizikom predaval Mehaniko. Ni si vzel odmora med šolskima urama, kar je bilo večkrat preveč zanj, naporno pa je bilo tudi za nas, še posebej pozimi v (s pečjo na premog) slabo ogrevanih prostorih na Stari tehniki na Aškerčevi (zdaj so tam prostori Fakultete za farmacijo). Po predavanjih (ki so se večkrat zavlekla) smo hiteli na Jadransko. Ko je nekoč zaradi zavlačevanja spet grozilo, da bomo zamudili naslednja predavanja, so študenti fizike začeli godrnjati. Profesor Kuhelj se je močno razjezil. Ko smo pa naslednjič prišli na predavanja, je bil prostor prijetno ogret in profesor je spravljivo dejal, da zaradi mraza res ne bi bilo treba delati takega cirkusa.

Kontrast s Fiziko I, pri kateri nas je prejšnje leto profesor Janez Strnad odlično usposobil, da s preprosto matematiko izračunamo ali ocenimo marsikaj, je bil velik. Izpeljave formul pri profesorju Kuhlju so bile dolge in



Slika 1. Zgrešen prototip letala.

zapletene, še posebej, ker nismo uporabljali vektorjev. Res pa smo znali potem izračunati stvari, ki so bile zunaj dosega Fizike I: upogib grede, torzijo nosilca in še veliko drugega.

Posebnost so bili Kuhljevi izpiti. Delali smo jih matematiki in fiziki skupaj s strojniki. Kuhelj je imel pred sabo naenkrat kar več kandidatov: če eden ni znal odgovora, se je profesor obrnil na drugega. Sam nikoli nisem kot učitelj poskušal kaj podobnega: tudi če si beležiš vse sproti, je težko narediti na koncu bilanco za vsakega posameznika.

Ker smo imeli celoletne predmete, sem prišel na idejo, da bi Višjo tehnično mehaniko delal predčasno, aprila, in tako malo zmanjšal pritisk izpitov v juniju. Krasne zapiske mi je posodil kar asistent Peter Vencelj. Profesor Kuhelj razumljivo nad mojo odločitvijo ni bil zadovoljen in je dejal: »Dosti si drznete, kolega Legiša.« Našel je šibko točko v mojem znanju in mi dal 8 ali 9, kar je bila še zmeraj lepa ocena. Gledano nazaj, nisem ravnal prav. Predavanja (če niso ravno katastrofalna) so najcenejši način usvajanja snovi. Večkrat ko si v stiku s snovjo, bolje se ti vtisne v spomin. V svojo obrambo naj rečem, da nisem izpustil praktično nobenega matematičnega predavanja (razen, kadar sem bil bolan).

Posebno zanimive pa so bile zgodbe iz prakse, ki jih je profesor Kuhelj sem in tja vključil v tok predavanj. Prva zgodba zadeva letalstvo. Leta 1949 so ga premestili v Zemun, na Vazduhoplovni inštitut. Pokazali so mu načrt letala, ki je bil videti približno kot na sliki 1. Kuhelj (ki je že v tridesetih letih konstruiral več uspešnih letal) jim je povedal, da je konstrukcija povsem zgrešena. Vsakdo, ki je kdaj uporabljal lomilko, ve, da bodo napetosti ob kratkem stiku dolgega krila s trupom izredno velike. Vendar mu niso verjeli. Izdelali so model, ki je v vetrovniku seveda razpadel.

Kot podpredsednik SAZU (1962–1980) je Kuhelj veliko potoval. V takrat sovjetski Osrednji Aziji je na potresnem območju izvedel za preprost predpis: pri zidanju stavbe mora biti razmik med dvema sosednima oknoma

vsaj tolikšen, kot je višina oken. (Predpostavka je, da dimenzije oken niso velike, kar je v ostrem podnebju tako in tako nujnost.) Ko je Kuhelj to povedal na nekem zborovanju slovenskih arhitektov, bi ga po njegovih besedah skoraj ubili. Ampak za preproste opečne hiše, pa tudi za številne druge stavbe je tak, vsakemu razumljiv predpis še kako smiseln, kot smo deset let po Kuhljevih predavanjih spoznali v neposredni bližini. Pri potresu v Črni gori leta 1979 se je sesulo več hotelov z železobetonskim ogrodjem – ker so le ozki stebri podpirali težke vmesne plošče. Nekdaj visoke zgradbe je potres zreduciral na le nekaj metrov višine. Kot ponesrečena torta skupaj zložene plošče so bile videti grozljivo. (Poiščite recimo na internetu slike pod »Hotel Slavija Budva«.) Na srečo je bil potres zunaj sezone, torej ko so bili hoteli prazni. Modernistična arhitektura teh hotelov je sledila Le Corbusierovemu programu »Pet točk moderne arhitekture« in zgledu več njegovih stavb na stebričkih, kot je recimo Villa Savoye. Statika takih stavb ni problematična. Horizontalni pospeški pa so zanje hitro uničevalni. Ti obmorski hoteli so bili po vsej verjetnosti projektirani pred katastrofalnim potresom v Skopju (1963). Dodaten problem je bil, da so te stavbe bile zgrajene v ustjih potokov ali hudournikov, na naplavinah. Na takem terenu pa se, kot nam je razložil Kuhelj, širijo površinsko t. i. Rayleighevi valovi, ki izgubljajo amplitudo počasneje kot valovi, ki se širijo tudi v globino. Tresenje lahko muljasta tla celo utekočini.

Gordonova knjiga je polna podobnih zgodb. Avtor je bil široko razgledan, z odlično klasično izobrazbo, imel je dar za pripovedovanje in za razlago. Konstrukcijo klasičnih grških templjev s stebri, težkimi vodoravnimi kamnitimi prekladami in težkimi strehami (ki je gotovo navdihnila Le Corbusiera in številne druge arhitekte) imenuje »intelektualna nečednost«. Knjiga pravi, da so te – zelo lepe – zgradbe nastale na podlagi starejših konstrukcij iz materiala s povsem drugačnimi lastnostmi – lesa. Dejansko so od teh stavb po potresih in drugih ujmah večinoma ostali le prafaktorji v obliki delov stebrov. Ti namreč zaradi okrogle oblike niso bili zanimivi kot gradbeni material. Veliko starejše mikenske trikotne preklade nad (redkimi) vratnimi odprtinami pa so bile dobra rešitev.

Knjiga nas pouči o energiji, potrebni za prelom nosilca, o nastanku in širjenju razpok. Izvemo, da je obok težko podreti: prelom na enem mestu ni dovolj, biti morata vsaj dva. Rimski akvadukti z množico obokov so preživeli dve tisočletji, čeprav delujejo gracilno. Loki mostov imajo lahko

kar tri gibljive povezave: eno na sredini in dve tam, kjer je lok naslonjen na breg. To je pomembno zaradi raztezkov ob spreminjanju temperature.

Mostovom je v knjigi posvečeno posebno poglavje. Ameriški železniški viadukti iz lesenega paličja so resnično obstajali – ne le v filmih. Konstrukcija je bila po knjigi taka zaradi pomanjkanja kvalificirane delovne sile in kapitala, boljših plač kot v Angliji, pripravljenosti na velika tveganja in seveda pohlepa. Cenena konstrukcija je pomenila velike dobičke, ko je promet stekel. Lesene viadukte so pozneje enostavno zasuli z gramozom iz vagonov in tako naredili nasipe.

Zunanji oporniki gotskih katedral imajo večkrat na vrhu težke kipe: ti niso samo okras: prispevajo k stabilizaciji stavbe. Gotske katedrale so čudež tehnike (in lepote), a tudi izredno drage.

V knjigi je tudi veliko informacij o lokih, katapultih, bioloških materialih ... Knjiga pravi, da narava ne mara torzije. Varnostne smučarske vezi so bile konstruirane najprej za to, da preprečijo večjo torzijsko obremenitev nog zaradi dolge ročice smuči.

Eksplozije parnih kotlov so spodbudile analizo napetosti v takih posodah, pa tudi v krvnih žilah, krilih jadrnic, prhutih netopirjev itd. V potniški kabini letala na velikih višinah vzdržujemo precej večji tlak, kot je v okolici. Ob pristanku pa se zunanji in notranji tlak izenačita. Ciklično obremenjevanje utruja material in povzroča nastanek mikrorazpok in njihovo širjenje, kar na koncu privede do loma. Utrujenost materiala je v letih 1953 in 1954 privedla do več letalskih katastrof.

Tudi rezanje pravokotnih lukenj v ladijskih konstrukcijah je privedlo do prelomov in potopitev. Napetosti v vogalih teh lukenj so namreč lahko izredno visoke in iz njih se širijo razpoke. Tudi krpanje lukenj je večkrat problematično: če je recimo krpa manj raztegljiva od okolice, bo na meji znova prišlo do trganja. Nesrečam je sicer posvečeno posebno poglavje.

Daljši nosilci, obremenjeni na stisk med obema koncema, bodo večinoma odpovedali zaradi upogiba. Kritično obremenitev je prvi izračunal Leonhard Euler, po knjigi z uporabo variacijskega računa.

Tradicionalna kitajska jadra z raztegljivo konstrukcijo so se ob hudem vetru avtomatično skrčila, obenem pa so se posamezni segmenti izbočili. Vse skupaj je bilo iz enostavnih naravnih materialov, a vseeno dovolj zanesljivo. Avtor, sam navdušen jadralec, je bil skeptičen do novih, lahkih in močnih, a slabo raztegljivih materialov za jadra. Pred desetletji je hudo

neurje povzročilo pravi pokol med udeleženci britanske regate. Vzrok so bila poleg že pravkar omenjenega lahka krmila iz ogljikovih vlaken, ki so se polomila. Kovinska krmila bi se v takih razmerah verjetno le upognila.

Med drugo svetovno vojno je avtorja obiskal lastnik cirkusa George May. Pokazal mu je, kako lahko iz skladovnice papirjev, zlepljenih v trakovih, z zamikom od kosa do kosa, ustvarimo satovje. Avtor pravi, da bi inženirji izumitelja najraje objeli. Inovacijo so takoj uporabili v letalstvu.

Nemogoče je na kratko predstaviti vso bogato vsebino Gordonove knjige. Tudi tehnično razgledan bralec bo v njej našel veliko zanimivega. Nekateri deli so tudi danes zelo aktualni. Imamo recimo tabelo s količinami energije, potrebnimi za izdelavo tone najbolj uporabljanih materialov.

V knjigi imamo tudi poglavje o filozofiji struktur. Avtor razloži, zakaj lahke strukture z najmanj truda naredimo z mnogo vrvmi in s kar se da malo na stisk obremenjenimi nosilci. Primer je recimo klasični šotor. Moderni šotori pa uporabljajo še boljšo rešitev z dvema ali več povezanimi lahkimi oboki. Prav tako se avtor pritožuje nad pomanjkanjem estetike v gradnji, čeprav inženirje že dovolj obremenjuje odgovornost za varnost in brezhibno delovanje njihovih izdelkov.

Ko običajni tekstil iz slabo raztegljvih nitk vlečemo v smeri nitk, bodo raztegi in deformacije minimalni. Če mokro brisačo obesite za vogal, pa se bo deformirala, ker nitke v tekstilu zdrsnejo druga ob drugi: iz pravokotne mreže nitk nastane paralelogramska. Blago se bo podaljšalo v navpični smeri in skrčilo v vodoravni. Knjiga pripoveduje, kako je v času, ko so korzeti prišli iz mode, modna kreatorka Madeleine Vionnet v Parizu začela rezati blago pod kotom 45° glede na potek niti. Tako je dosegla, da se je večerna obleka na osebi avtomatično podaljšala v navpični smeri in skrčila v prečni.

Na koncu knjige je dodatek s formulami. V delu je veliko risb in nekaj fotografij, ki so zanimive, a ne ravno kakovostne.

LITERATURA

[1] J. E. Gordon, *Structures or Why things don't fall down*, Da Capo Press, Cambridge 2003, 395 str.

Peter Legiša

Vabilo za predloge priznanj DMFA Slovenije za leto 2019

Spoštovane članice in člani DMFA Slovenije.

Komisija za društvena priznanja vabi k vložitvi predlogov za podelitev priznanj DMFA Slovenije za leto 2019. Priznanje lahko prejme posameznik ali posameznica za uspešno delo z mladimi ali za strokovno dejavnost, posameznice oz. posamezniki ali ustanove pa tudi za uspešno sodelovanje z Društvom.

Predloge s pisnimi utemeljitvami pošljite po e-pošti na naslov `tajnik@dmfa.si` ali po običajni pošti na naslov DMFA Slovenije, Komisija za društvena priznanja, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, do četrtka, 5. septembra 2019. Predlogi naj bodo pripravljeni v skladu z veljavnim pravilnikom, ki je objavljen na društveni spletni strani (`http://www.dmfa.si/ODrustvu/DrustvenaPriznanja.aspx?id=DP`) in v Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik 65, št. 5, str. 191–192 (september 2018).

Priznanja bodo podeljena na letošnjem Občnem zboru DMFA Slovenije, ki bo predvidoma potekal 27. ali 28. septembra 2019 na Bledu. Predlagatelji in prejemniki priznanj bodo o odločitvi komisije obveščeni najkasneje 14 dni pred podelitvijo.

Boštjan Kuzman

Obvestilo

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je stanovska organizacija, ki združuje pedagoge, raziskovalce in študente. Ustanovljeno je bilo leta 1949 in tako letos proslavlja svojo 70. obletnico. Ob tej priložnosti bo v petek, 27., in v soboto, 28. septembra 2019, v hotelu Bled Rose (nekdaj Jelovica) organizirano srečanje s slavnostnim občnim zborom.

Predlog dnevnega reda 72. občnega zbora DMFA, ki bo 27. septembra 2019 ob 17.30:

- Otvoritev
- Izvolitev delovnega predsedstva
- Društvena priznanja
- Poročila o delu društva

- Razprava o poročilih
- Vprašanja in pobude
- Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2018

V okviru srečanja bo potekala tudi 1. mednarodna Konferenca o poučevanju matematike, fizike in astronomije. Več informacij o programu konference in vabilo za prispevke z roki za oddajo povzetkov in registracijo bo objavljeno na povezavi, ki bo na spletni strani DMFA (`www.dmfa.si`). Med najpomembnejšimi tradicionalnimi dejavnostmi društva je izvedba in organizacija različnih tekmovanj v znanju in temu ustrezno smo izbrali vodilno temo konference: delo z nadarjenimi učenci (tekmovanja, krožki, tabori, raziskovalne naloge ...). Poleg prispevkov o različnih metodah dela z nadarjenimi bodo na konferenci dobili čas in prostor tudi prispevki o sodobnih vsebinah in pristopih k poučevanju matematike, fizike in astronomije. Učiteljice in učitelje na osnovnih in srednjih šolah vabimo, da se konference udeležite s svojimi prispevki.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov združuje tudi raziskovalce s teh področij, ki delujejo na vseh slovenskih univerzah in drugih raziskovalnih institucijah. To povezovalno funkcijo društva želimo okrepiti, zato letos začenjamo z matematičnim področjem in v okviru letnega društvenega srečanja pripravljamo še dva dogodka. Prvi je srečanje Women of mathematics on the Mediterranean shores. Predavateljice zastopajo različna področja matematike in njihova predavanja bodo namenjena širši strokovni javnosti, razumljiva študentom matematike na 2. stopnji študija oziroma strokovni javnosti. Srečanje je namenjeno popularizaciji raziskovalne matematike med mladimi, s poudarkom na prikazu različnih uspešnih kariernih poti izbranih žensk. Vzporedno bo potekalo tudi Srečanje mladih raziskovalcev v matematiki. Na srečanju bodo doktorski študentje in mlajši doktorandi matematike vseh slovenskih univerz na kratko predstavili svoje delo in se med sabo spoznali.

Za informacije o teh in drugih spremljevalnih dogodkih ob obletnici društva spremljajte spletno stran DMFA (`www.dmfa.si`). Vljudno vabljeni k udeležbi!

Aleš Mohorič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2019
Letnik 66, številka 1
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Odkritje spomenika Josipu Plemlju na Bledu ob 25. občnem zboru, ki je potekal 7. in 8. decembra 1973.