

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2025
Letnik 71
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 71 • ŠT. 3 • STR. 81–120 • JANUAR 2025

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2025, letnik 71, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** zalozba@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664
Mednarodna nakazila: Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBAS12X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Uredniški odbor: Peter Legiša, Sašo Strle, Bojan Kuzma (urednik za matematiko), Aleš Mohorič (tehnični urednik, urednik za fiziko in odgovorni urednik), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl.

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 150 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 60 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2025 DMFA Slovenije

Članki so objavljeni z licenco CC BY-SA

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

PREMICE, KI APROKSIMIRAJO DANE TOČKE V RAVNINI

DAVID GAJSER¹ IN VAN DEČKO²

¹II. gimnazija Maribor in
Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru
david.gajser@um.si

²Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani
vd29091@student.uni-lj.si

Math. Subj. Class. (2010): 62J05

V delu je predstavljenih sedem paroma neekvivalentnih kriterijev za določitev premice, ki najbolje aproksimira dane točke v ravnini. Ti kriteriji porodijo: premico najkrajših razdalj, glavno os, premici najkrajših vodoravnih in najkrajših navpičnih razdalj, regresijski premici za spremenljivki x in y ter reducirano glavno os.

LINES OF BEST FIT

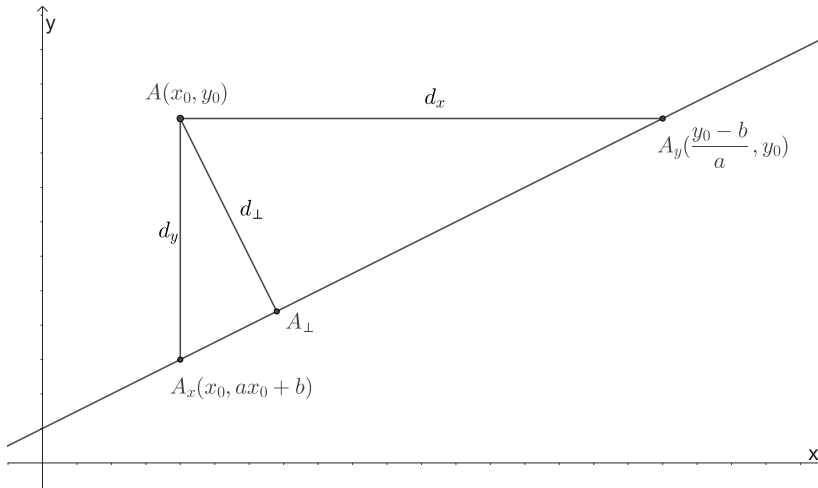
We present seven pairwise nonequivalent criteria for determining a line of best fit for given points in the plane. We call the obtained lines: the line of shortest distances also known as a 1-line median, major axis (a product of orthogonal regression), the lines of shortest horizontal and shortest vertical distances (a product of least absolute deviation regression), the regression lines of y on x and x on y and reduced major axis.

Uvod

V koordinatnem sistemu v ravnini imamo podanih $n \geq 3$ točk s koordinatami (x_i, y_i) , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, in iščemo premico, ki se tem točkam kar najbolje prilega. Toda kaj pomeni *najbolje prilega*? Možnih odgovorov je več, nepoznavalci regresijske premice¹ pa po navadi odgovorijo: “Vsota razdalj danih točk do premice mora biti najmanjša možna.” Premico, ki jo rodi tak kriterij, imenujmo *premica najkrajših razdalj*. Temu kriteriju je zelo soroden: “Vsota kvadratov razdalj danih točk do premice mora biti najmanjša možna.” Premico, ki jo dobimo s tem kriterijem, imenujmo *glavna os* [1]. Seveda to nista edina možna kriterija za določitev premice. Pogosto so namreč abscise danih točk vrednosti neke statistične spremenljivke X , ordinate pa vrednosti druge statistične spremenljivke Y . Želeli bi izračunati linearno zvezo med X in Y , ki bi bila za dane točke najbolj smiselna. Ponovno se lahko vprašamo, kaj pomeni “najbolj smiselna”? To je seveda

¹Kot nepoznavalci regresijske premice so tukaj in v nadaljevanju mišljeni dijaki programa mednarodne mature, ki v okviru izobraževanja še niso spoznali regresijske premice. Verjamemo, da bi podobne odgovore dobili tudi pri drugih osebah, ki ne poznajo kriterija določitve regresijske premice in razumejo zastavljeno vprašanje.

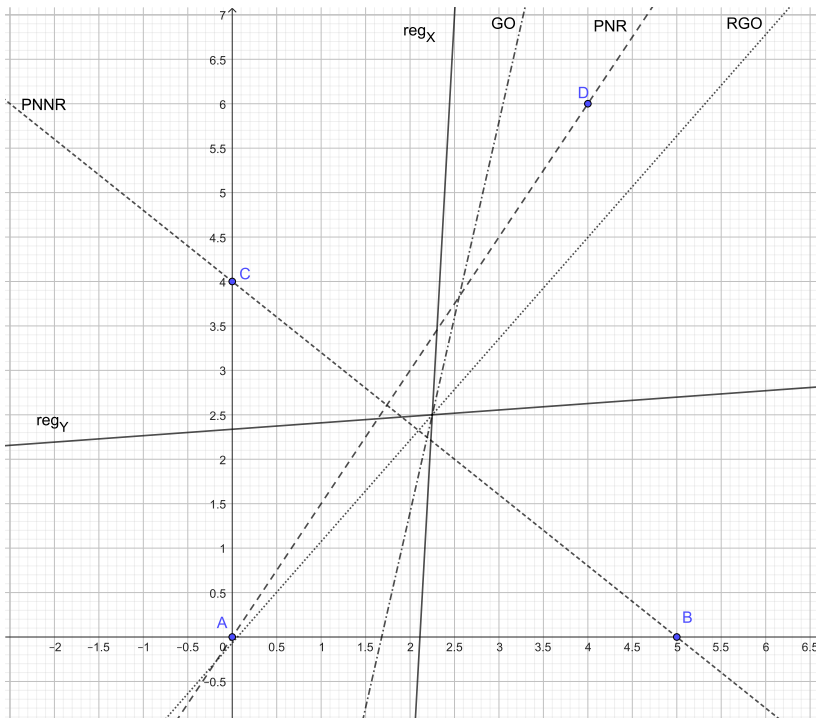
odvisno od konteksta, pri čemer je osnovni šolski kontekst ta, da želimo pri dani vrednosti t. i. *pojasnjevalne* spremenljivke X s pomočjo premice kar se da točno napovedati vrednost t. i. *odvisne* spremenljivke Y . Torej želimo minimizirati odstopanje točk od premice v y -smeri. Nepoznavalci regresijske premice na tem mestu po navadi odgovorijo, da moramo minimizirati vsoto vseh navpičnih razdalj točk do premice. Tako smo dobili tretji možen pomen za *najbolje prilegati*, dobljeno premico pa imenujmo *premica najkrajših navpičnih razdalj*. Četrty, najbolj šolski primer, je ta, ki nam porodi *regresijsko premico za spremenljivko y* . V tem primeru premica, ki se danim točkam najbolj prilega, minimizira vsoto kvadratov navpičnih razdalj točk do sebe. Če bi namesto navpične smeri gledali vodoravno, bi analogno lahko dobili *premico najkrajših vodoravnih razdalj* in *regresijsko premico za spremenljivko x* .



Slika 1. Točke A_x , A_\perp in A_y so zaporedoma navpična, pravokotna in vodoravna projekcija točke A na premico z enačbo $y = ax + b$, dolžine d_y , d_\perp in d_x pa so zaporedoma razdalje od točk A_x , A_\perp in A_y do točke A . Kako "blizu" je točka A premici z enačbo $y = ax + b$, lahko podamo na več načinov, recimo s števili d_\perp , d_\perp^2 , d_x , d_x^2 , d_y , d_y^2 ali $\frac{d_x \cdot d_y}{2}$. Te mere za bližino točke do premice zaporedoma uporabimo pri definicijah premice najkrajših razdalj, glavne osi, premice najkrajših vodoravnih razdalj, regresijske premice za spremenljivko x , premice najkrajših navpičnih razdalj, regresijske premice za spremenljivko y in reducirane glavne osi.

O vsebini prvega odstavka avtor Gajser kot učitelj z dijaki pogosto razpravlja pred obravnavo regresijske premice. Avtor Dečko pa se je v šolskem letu 2018/19 kot Gajserjev dijak spomnil zelo zanimive alternative za krite-

rij najboljšega prileganja: “Kaj če bi minimizirali vsoto ploščin pravokotnih trikotnikov s katetami vzporednimi koordinatnima osema, katerih hipotenuza leži na iskani premici, oglišča nasproti hipotenuze pa so v podanih točkah?” Izkaže se, da ta kriterij da nov, sedmi tip premice, ki dobro aproksimira dane točke. Dečko je o njej napisal uspešno raziskovalno nalogo [2]. Čeprav se je kriterija zanjo spomnil sam, pa je le-ta že bil opisan v literaturi, recimo v [3]. V tem prispevku bomo dobljeno premico imenovali *reducirana glavna os*, tako kot v [1, 3]. Predstavljene kriterije za dobro aproksimacijo točk smo ponazorili tudi s sliko 1 in opisom pod njo.



Slika 2. Premice, ki po sedmih različnih kriterijih najbolj aproksimirajo točke $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(0, 4)$ in $D(4, 6)$. Abscise in ordinate teh točk so v zelo šibki pozitivni korelaciji ($r \doteq 0,06$). Regresijski premici za spremenljivki x in y sta označeni s polno črto in zaporedoma z oznakama reg_X in reg_Y , glavna os (GO) je črtkano-pikčasta, reducirana glavna os (RGO) je pikčasta, premica najkrajših razdalj (PNR) v tem primeru sovpada s premico najkrajših vodoravnih razdalj in je redkeje črtkana kot premica najkrajših navpičnih razdalj (PNNR).

V tem prispevku bomo preleteli vseh sedem opisanih vrst premic, ki aproksimirajo dane točke, in spoznali nekaj njihovih zanimivih lastnosti. Enačbe vseh sedmih vrst premic smo poračunali za primer štirih točk, re-

zultat pa je predstavljen na sliki 2. Seveda je aproksimacija štirih točk s premicami le teoretično zanimiva, še posebej, če med točkami ni jasne korelacije. Pa vendar nam ta primer prikaže nekaj lastnosti, ki jih bomo dokazali v nadaljevanju:

- obstajajo taka premica najkrajših razdalj ter taki premici najkrajših vodoravnih in najkrajših navpičnih razdalj, da vsaka od teh premic poteka skozi dve izmed danih točk in
- regresijski premici za spremenljivki x in y , glavna os ter reducirana glavna os vse vsebujejo skupno točko s koordinatama, ki sta povprečji x -koordinat in y -koordinat danih točk.

Omeniti je treba, da je v literaturi obravnavanih še več vrst premic, ki dobro aproksimirajo dane točke. Obravnavamo lahko npr. neevklidske ali pa utežene razdalje, glej npr. [4].

Osnovne oznake in predpostavka. Povprečje x -koordinat točk označimo z μ_x , standardni odklon pa s $\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_x)^2}{n}}$. Povprečje y -koordinat točk označimo z μ_y , standardni odklon pa s σ_y .

Predpostavimo $\sigma_x \neq 0$ in $\sigma_y \neq 0$. Z drugimi besedami, ne obstaja niti vodoravna niti navpična premica, ki bi vsebovala vse naše točke. Dodajmo komentar, da je v primeru, ko je $\sigma_x = 0$ ali $\sigma_y = 0$, problem zelo preprosto rešljiv po vseh sedmih kriterijih, ki vsi dajo isto rešitev: optimalna premica je tista navpična oz. vodoravna premica, ki vsebuje vse dane točke.

(Pearsonov) Korelacijski koeficient definiramo kot $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y n}$.

1. Premica najkrajših razdalj

Vsako premico v ravnini lahko opišemo z enačbo oblike $x \cos \alpha + y \sin \alpha + c = 0$, kjer sta $\alpha, c \in \mathbb{R}$. Omejili bi se lahko celo na $\alpha \in [0, \pi)$; takrat bi α predstavljal naklonski kot normale na premico. Naj bo d razdalja premice z enačbo $x \cos \alpha + y \sin \alpha + c = 0$, kjer sta $\alpha, c \in \mathbb{R}$, do točke (x_1, y_1) . Ker je $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ smerni vektor normale naše premice, leži na njej ena izmed točk $(x_1 + d \cos \alpha, y_1 + d \sin \alpha)$ ali $(x_1 - d \cos \alpha, y_1 - d \sin \alpha)$. Torej ob ustreznem izboru predznaka velja

$$(x_1 \pm d \cos \alpha) \cos \alpha + (y_1 \pm d \sin \alpha) \sin \alpha + c = 0.$$

Ko enakost poenostavimo in upoštevamo $d \geq 0$, dobimo $d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha + c|$. Definiramo

$$L_1(\alpha, c) = \sum_{i=1}^n |x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c|.$$

Torej je $L_1(\alpha, c)$ vsota razdalj danih točk do premice z enačbo $x \cos \alpha + y \sin \alpha + c = 0$. Premica najkrajših razdalj za dane točke je vsaka premica, podana s parametroma $\alpha, c \in \mathbb{R}$, ki minimizira $L_1(\alpha, c)$.

Kako lahko enačbo te premice poračunamo iz danih točk? Velja naslednji izrek [4].

Izrek 1. *Vsaj ena izmed premic najkrajših razdalj poteka skozi dve dani točki.*

Z enoličnostjo rešitve se v tem prispevku ne bomo ukvarjali.

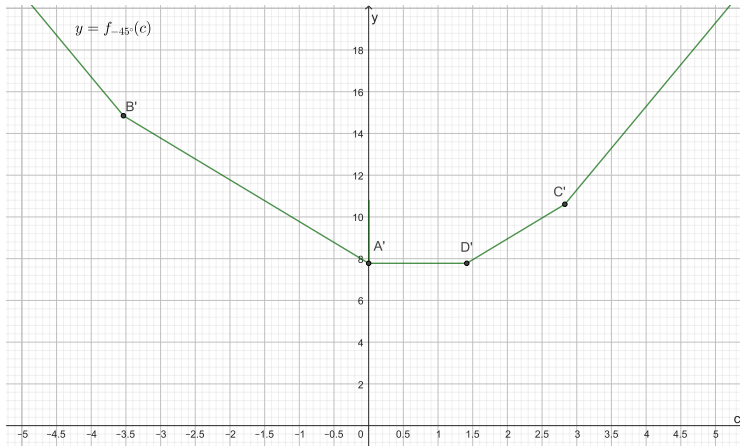
Dokaz. Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ definirajmo funkcijo $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f_\alpha(c) = L_1(\alpha, c)$. Ta funkcija je odsekoma linearna, saj jo lahko zapišemo kot

$$f_\alpha(c) = \sum_{i=1}^n \pm_i (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c),$$

kjer je za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ predznak \pm_i pred $(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c)$ odvisen od števila c in je določen tako, da je število $\pm_i (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c)$ nenegativno. Opazimo, da se za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ predznak \pm_i spremeni le pri tisti vrednosti spremenljivke c , za katero je $x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c = 0$. Torej se linearni odseki funkcije $f_\alpha(c)$ stikajo pri tistih vrednostih spremenljivke c , pri katerih je $x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c = 0$ za neki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ker je funkcija $f_\alpha(c) = \sum_{i=1}^n |x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c|$ navzdol omejena z 0, doseže minimum na meji vsaj enega izmed svojih linearnih odsekov, torej pri takem $c \in \mathbb{R}$, da za neki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ velja $x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c = 0$. Primer funkcije f_α za $\alpha = -45^\circ$ in začetne točke s slike 2 je predstavljen na sliki 3.

Ker iščemo le *neko* premico z enačbo $x \cos \alpha + y \sin \alpha + c = 0$, za katero je dosežen minimum funkcije $L_1(\alpha, c)$, se je torej dovolj omejiti na tiste premice, za katere je $x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c = 0$ za neki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kar je ekvivalentno temu, da premica vsebuje eno izmed podanih točk. Obravnavati moramo n možnosti za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (indeks i nam pove, katera izmed n podanih točk leži na iskani premici) in izbrati tisto, ki da najmanjšo vrednost $L_1(\alpha, c)$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je minimum dosežen pri $i = n$ (da je res dosežen, bomo videli v nadaljevanju), torej velja $c = -x_n \cos \alpha - y_n \sin \alpha$. Sledi, da je za minimum $L_1(\alpha, c)$ dovolj poiskati minimum funkcije

$$g(\alpha) = L_1(\alpha, -x_n \cos \alpha - y_n \sin \alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} |(x_i - x_n) \cos \alpha + (y_i - y_n) \sin \alpha|.$$



Slika 3. Graf funkcije f_α za $\alpha = -45^\circ$ in podane točke $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(0,4)$ ter $D(4,6)$. Linearni odseki funkcije f_{-45° se stikajo v točkah A' , B' , C' in D' . Točka $A'(c_A, f_{-45^\circ}(c_A))$ je s točko A povezana preko zveze $x_A \cos(-45^\circ) + y_A \sin(-45^\circ) + c_A = 0$, kjer sta $x_A = 0$ in $y_A = 0$ koordinati točke A . Sledi $c_A = 0$. Analogno so točke B' , C' in D' zaporedoma povezane s točkami B , C in D . Ta graf lahko povežemo s sliko 2, kjer vidimo, da gre premica najkrajših razdalj za točke A , B , C in D skozi točki A in D , njena normala pa ima naklonski kot relativno blizu -45° . Torej ni presenetljivo, da je minimum funkcije f_{-45° dosežen pri točkah A' in D' .

Ker je funkcija g zvezna in periodična s periodo 2π , doseže minimum. Trdimo, da ga doseže pri takem $\alpha \in \mathbb{R}$, za katerega obstaja indeks $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, da velja $(x_i - x_n) \cos \alpha + (y_i - y_n) \sin \alpha = 0$. To bomo dokazali s protislovjem, zato predpostavimo nasprotno. Sledi, da je minimum funkcije g dosežen pri takem α , za katerega za vse $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ velja $(x_i - x_n) \cos \alpha + (y_i - y_n) \sin \alpha \neq 0$. V dovolj majhni okolici takega α je funkcija g enaka $g(\alpha) = A \cos \alpha + B \sin \alpha$ za neki konstanti $A, B \in \mathbb{R}$. Sledi, da je $g''(\alpha) = -A \cos \alpha - B \sin \alpha = -g(\alpha)$. Ker je pri tem α dosežen minimum funkcije g , mora veljati $g''(\alpha) \geq 0$, torej $g(\alpha) \leq 0$. Po drugi strani iz definicije funkcije g sledi $g(\alpha) \geq 0$, torej velja $g(\alpha) = 0$. Za tak α torej velja, da je vrednost kriterijske funkcije L_1 za pripadajočo premico enaka 0, kar je mogoče le, če vse dane točke ležijo na tej premici. Sledi, da za vse $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ velja $(x_i - x_n) \cos \alpha + (y_i - y_n) \sin \alpha = 0$, kar je v protislovju s predpostavko, ki smo jo naredili na začetku dokaza s protislovjem. Sledi, da obstaja tak $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, da funkcija g doseže minimum pri vrednosti α , za katero velja $(x_i - x_n) \cos \alpha + (y_i - y_n) \sin \alpha = 0$. Za tak i torej točki (x_i, y_i) in (x_n, y_n) ležita na premici najkrajših razdalj, kar dokaže izrek. \square

Če nepoznavalcu regresijske premice damo navodilo, da za dane točke potegne premico, ki jih bo kar najbolje aproksimirala, bo zelo verjetno izbral dve izmed danih točk in skozi njiju potegnil premico. Če točke niso podane grafično, bo najbrž izbral prvi dve točki, kar skoraj gotovo ne da pravilnega rezultata. Pravkar dokazani izrek pa pove, da tak pristop ni povsem napačen.

Z uporabo izreka 1 lahko dobimo postopek za izračun enačbe vsaj ene izmed premic najkrajših razdalj. Dovolj je namreč, da za vsak par danih točk izračunamo premico, ki poteka skozi njiju, in izberemo tisto premico, ki ima najmanjšo vrednost kriterijske funkcije L_1 . Tak postopek naredi $O(n^3)$ korakov, saj za izračun vrednosti kriterijske funkcije L_1 za dano premico potrebujemo $O(n)$ korakov, možnih parov točk pa je $O(n^2)$. Z nekaj optimizacije lahko premico najkrajših razdalj izračunamo v $O(n^2 \log n)$ korakih [4].

Kdaj je smiselno uporabiti premico najkrajših razdalj? Recimo, da imamo nekaj vasi v ravnini, ki imajo isto število prebivalcev (v nasprotnem primeru bi uporabili uteži). Želimo konstruirati tak raven odsek železnice, da bo povprečna razdalja prebivalca do železnice najkrajša [4].

2. Glavna os

Za $\alpha, c \in \mathbb{R}$ definiramo

$$L_2(\alpha, c) = \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c)^2.$$

Torej je $L_2(\alpha, c)$ vsota kvadratov razdalj danih točk do premice z enačbo $x \cos \alpha + y \sin \alpha + c = 0$. Glavna os za dane točke je premica, podana s tistima parametroma $\alpha, c \in \mathbb{R}$, ki minimizirata $L_2(\alpha, c)$.

Ker je funkcija $L_2(\alpha, c)$ v spremenljivki c kvadratna s pozitivnim vodilnim koeficientom, za vsak fiksen α doseže (enoličen) minimum pri $\frac{\partial L_2}{\partial c}(\alpha, c) = 0$, torej pri

$$\sum_{i=1}^n 2(x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha + c) = 2\mu_x n \cos \alpha + 2\mu_y n \sin \alpha + 2nc = 0,$$

kar lahko poenostavimo v $\mu_x \cos \alpha + \mu_y \sin \alpha + c = 0$. Sledi, da se pri iskanju optimalne premice lahko omejimo na premice, ki gredo skozi točko (μ_x, μ_y) .

Zanje je

$$\begin{aligned} L_2(\alpha, c) &= L_2(\alpha, -\mu_x \cos \alpha - \mu_y \sin \alpha) = \\ &= \sum_{i=1}^n ((x_i - \mu_x) \cos \alpha + (y_i - \mu_y) \sin \alpha)^2, \end{aligned}$$

kar označimo z $f(\alpha)$. Funkcijo f lahko poenostavimo

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 \cos^2 \alpha + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2 \sin^2 \alpha + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \cos \alpha \sin \alpha = \\ &= n\sigma_x^2 \cos^2 \alpha + n\sigma_y^2 \sin^2 \alpha + 2rn\sigma_x\sigma_y \cos \alpha \sin \alpha = \\ &= n \left(\sigma_x^2 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_y^2 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha \right) = \\ &= \frac{n}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \cos 2\alpha + 2r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha). \end{aligned}$$

Opazimo, da je v primeru $\sigma_x = \sigma_y$ in $r = 0$ funkcija f konstantna, sicer pa je minimum vrednosti $f(\alpha)$ dosežen natanko za tiste $\alpha \in \mathbb{R}$, pri katerih je smer enotskega vektorja $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ nasprotna smeri vektorja $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2, 2r\sigma_x\sigma_y)$. V primeru $\sigma_x = \sigma_y$ in $r > 0$ je minimum dosežen natanko pri $\alpha \in \{-\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, kar pomeni, da je simetrala sodih kvadrantov normala na glavno os in je glavna os vzporedna simetrali lihih kvadrantov. Če je $\sigma_x = \sigma_y$ in $r < 0$, je minimum dosežen natanko pri $\alpha \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, kar pomeni, da je glavna os vzporedna simetrali sodih kvadrantov. V primeru, ko standardna odklona v x in y smeri nista enaka, pa lahko izrazimo

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2},$$

od koder lahko izračunamo α . Vidimo, da na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dobimo dve rešitvi, ki se razlikujeta za kot $\frac{\pi}{2}$. Pri eni je dosežen maksimum funkcije f , pri drugi pa minimum. V tem primeru je torej glavna os enolično določena.

Dokazali smo naslednji izrek.

Izrek 2. *Za glavno os z enačbo $x \cos \alpha + y \sin \alpha + c = 0$ velja, da poteka skozi točko (μ_x, μ_y) . Nadalje,*

a) če je $r = 0$ in $\sigma_x = \sigma_y$, ni omejitve na parameter $\alpha \in \mathbb{R}$,

Premice, ki aproksimirajo dane točke v ravnini

- b) če je $r > 0$ in $\sigma_x = \sigma_y$, je glavna os vzporedna simetrali lihih kvadrantov,
c) če je $r < 0$ in $\sigma_x = \sigma_y$, je glavna os vzporedna simetrali sodih kvadrantov,
d) če $\sigma_x \neq \sigma_y$, je α rešitev enačbe $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$.

Posledica 3. Če je glavna os vzporedna simetrali lihih ali sodih kvadrantov, je $\sigma_x = \sigma_y$.

Dokaz. Če je glavna os z enačbo $x \cos \alpha + y \sin \alpha + c = 0$ vzporedna simetrali lihih ali sodih kvadrantov, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ni definiran. Torej odpade četrta možnost v izreku 2 in velja $\sigma_x = \sigma_y$. \square

Iz definicije glavne osi sledi, da jo toge transformacije ravnine, ki preslikajo dane točke, preslikajo v novo glavno os. Če torej začnemo s točkami v ravnini in nismo omejeni glede tega, kako je koordinatni sistem obrnjen, ga lahko postavimo (ali togo premaknemo) tako, da je glavna os v smeri simetrale lihih ali sodih kvadrantov. Posledica 3 nam pove, da tako dobimo $\sigma_x = \sigma_y$.

Izrek 2 nam omogoča, da enačbo glavne osi izračunamo v linearnem času $O(n)$, torej zelo hitro. Glavno os lahko uporabimo v podobnih primerih kot premico najkrajših razdalj. Še posebej sta uporabni v primerih, ko so začetne točke izmerjene in lahko pričakujemo merske napake v obeh koordinatah [1]. Dodatno opazimo, da kriterij za glavno os močnejše upošteva točke, ki so dlje od premice, kot kriterij za premico najkrajših razdalj.

Pomembna lastnost glavne osi in premice najkrajših razdalj je neodvisnost definicije od izbire koordinatnega sistema, tj. dobro sta definirani tudi za točke v ravnini brez postavljenega koordinatnega sistema. Slednje ni res za preostalih pet tipov premic, ki jih bomo obravnavali; pri njih sta smeri x in y pomembni.

3. Premici najkrajših vodoravnih in najkrajših navpičnih razdalj

Obravnavali bomo le premico najkrajših navpičnih razdalj, premico najkrajših vodoravnih razdalj bi dobili z ustrežno zamenjavo x -koordinat in y -koordinat v izpeljavi. Najprej opazimo, da premica najkrajših navpičnih razdalj ne more biti navpična, saj vse začetne točke ne ležijo na skupni navpični premici. Torej lahko enačbo premice najkrajših navpičnih razdalj

iščemo v eksplisitni obliki $y = ax + b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$. Zato za $a, b \in \mathbb{R}$ definiramo

$$L_3(a, b) = \sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i|.$$

Premica najkrajših navpičnih razdalj je torej tista z enačbo $y = ax + b$, ki minimizira $L_3(a, b)$.

Izrek 4. *Vsaj ena izmed premic najkrajših navpičnih razdalj poteka skozi dve dani točki.*

Z enoličnostjo rešitve se v tem prispevku ne bomo ukvarjali.

Dokaz. Opazimo, da je za vsak $a \in \mathbb{R}$ funkcija $f_a(b) = L_3(a, b)$ navzdol omejena z 0 in odsekoma linearna v b , torej doseže minimum, ko za neki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ velja $ax_i + b - y_i = 0$, torej ko i -ta točka leži na premici z enačbo $y = ax + b$. Ker iščemo le *neko* premico z enačbo $y = ax + b$, za katero je dosežen minimum funkcije $L_3(a, b)$, se je dovolj omejiti na tiste premice, ki vsebujejo eno izmed danih točk. Obravnavati moramo vseh n možnosti za točko, ki leži na premici, in izbrati tisto, ki dopušča najmanjšo vrednost kriterijske funkcije L_3 . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je minimum dosežen pri n -ti točki (da je res dosežen, bomo videli v nadaljevanju), torej velja $b = y_n - ax_n$. Posledično je najmanjša vrednost funkcije $L_3(a, b)$ enaka najmanjši vrednosti funkcije

$$f(a) = L_3(a, y_n - ax_n) = \sum_{i=1}^{n-1} |a(x_i - x_n) - (y_i - y_n)|,$$

ki je ponovno odsekoma linearna, zato obstaja $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, za katerega velja, da funkcija f doseže minimum v rešitvi enačbe $a(x_i - x_n) - (y_i - y_n) = 0$. Od tod sledi, da i -ta in n -ta točka ležita na premici z enačbo $y = ax + b$. \square

Z uporabo izreka 4 lahko dobimo postopek za izračun premice najkrajših navpičnih razdalj, ki porabi $O(n^3)$ korakov, podobno kot smo dobili postopek za izračun premice najkrajših razdalj.

Uporaba premice najkrajših navpičnih razdalj je sorodna uporabi regresijske premice za spremenljivko y (glej naslednji razdelek). Pri slednji točke, ki ležijo vertikalno najdlje od premice, prispevajo veliko več h kriterijski funkciji kot točke, ki so bližje premici (odmik se v kriterijski funkciji

Premice, ki aproksimirajo dane točke v ravnini

kvadrira). Zato v primeru, da med točkami pričakujemo osamelce in želimo omejiti njihov vpliv na iskano premico, lahko uporabimo premico najkrajših navpičnih razdalj [5].

4. Standardni regresijski premici

Podobno kot premica najkrajših navpičnih razdalj tudi regresijska premica za spremenljivko y ne more biti navpična, saj niso vse začetne točke na navpični premici. Torej lahko njeno enačbo iščemo v eksplicitni obliki. Za $a, b \in \mathbb{R}$ definiramo

$$L_4(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

Regresijska premica za spremenljivko y je torej tista z enačbo $y = ax + b$, ki minimizira $L_4(a, b)$. Regresijska premica za spremenljivko x je definirana analogno.

Izrek 5. *Regresijski premici za spremenljivki x in y potekata skozi točko (μ_x, μ_y) . Regresijska premica za spremenljivko y ima smerni koeficient enak $r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, regresijska premica za spremenljivko x pa $\frac{1}{r} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, če je le $r \neq 0$. Če je $r = 0$, je regresijska premica za spremenljivko x navpična.*

Dokaz. Ker je funkcija $L_4(a, b)$ v spremenljivki b kvadratna s pozitivnim vodilnim koeficientom, za vsak fiksni a doseže (enoličen) minimum pri $\frac{\partial L_4}{\partial b}(a, b) = 0$, torej pri

$$\sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 2a\mu_x n + 2nb - 2\mu_y n = 0,$$

kar lahko poenostavimo v $a\mu_x + b = \mu_y$. Sledi, da se pri iskanju optimalne premice lahko omejimo na premice, ki gredo skozi točko (μ_x, μ_y) . Zanje je

$$L_4(a, b) = L_4(a, \mu_y - a\mu_x) = \sum_{i=1}^n (a(x_i - \mu_x) - (y_i - \mu_y))^2,$$

kar označimo z $f(a)$. Funkcijo f lahko poenostavimo

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{i=1}^n a^2(x_i - \mu_x)^2 - 2 \sum_{i=1}^n a(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) + \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2 = \\ &= n\sigma_x^2 a^2 - 2rn\sigma_x\sigma_y a + n\sigma_y^2. \end{aligned}$$

Vidimo, da je f kvadratna funkcija s pozitivnim vodilnim koeficientom, zato ima enoličen minimum v temenu pri $a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Dokaz dela izreka o regresijski premici za spremenljivko x prepustimo bralcu. \square

Izrek 5 nam pove, da lahko standardni regresijski premici izračunamo v linearnem času, tj. zelo hitro. Ti premici sta v praksi največkrat uporabljani [3]. Kot smo omenili že v uvodu, ju pogosto uporabljamo takrat, ko pričakujemo linearno odvisnost med statističnima spremenljivkama X in Y in želimo s pomočjo vrednosti ene spremenljivke in enačbe premice napovedati vrednost druge spremenljivke. Standardni regresijski premici sta tudi najpogosteje implementirani v programih, ki znajo risati trendne črte, kot sta Excel in Geogebra, ter tudi grafični kalkulatorjih, kot je recimo TI Nspire.

5. Reducirana glavna os

Iz opisa v uvodu je jasno, da je reducirana glavna os navpična ali vodoravna le v primeru, ko so vse začetne točke na navpični ali vse na vodoravni premici. Ker to ne drži (predpostavili smo namreč $\sigma_x \neq 0$ in $\sigma_y \neq 0$), lahko njeno enačbo iščemo v eksplicitni obliki z neničelnim vodilnim koeficientom. Za $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, definiramo

$$L_5(a, b) = \sum_{i=1}^n \frac{|ax_i + b - y_i| \cdot \left| \frac{y_i - b}{a} - x_i \right|}{2}.$$

Torej je $L_5(a, b)$ vsota plosčin pravokotnih trikotnikov s hipotenzami na premici $y = ax + b$, katerih oglišča nasproti hipotenuze so v danih točkah in katerih katete so vzporedne koordinatnim osem (glej sliko 1). Reducirana glavna os je tista premica z enačbo $y = ax + b$, ki minimizira $L_5(a, b)$. Zaradi absolutnih vrednosti v definiciji $L_5(a, b)$ je videti, kot da funkcija L_5 ni gladka. A to ne drži. Velja namreč

$$\begin{aligned} L_5(a, b) &= \sum_{i=1}^n \frac{|ax_i + b - y_i| \cdot |y_i - b - ax_i|}{2|a|} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(ax_i + b - y_i)^2}{2|a|}. \end{aligned}$$

Izrek 6. Reducirana glavna os poteka skozi točko (μ_x, μ_y) in ima smerni koeficient enak $\pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Predznak smernega koeficienta je enak predznaku korelacijskega koeficienta r , v primeru $r = 0$ pa oba predznaka dasta reducirano glavno os.

Dokaz. Za vsak $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $f_a(b) = L_5(a, b)$ kvadratna funkcija spremenljivke b s pozitivnim vodilnim koeficientom, zato doseže minimum pri $f'_a(b) = 0$, torej pri $\sum_{i=1}^n \frac{ax_i + b - y_i}{|a|} = 0$. Če enačbo na obeh straneh delimo z n in pomnožimo z $|a|$, dobimo $\mu_y = a\mu_x + b$, torej točka (μ_x, μ_y) zmeraj leži na reducirani glavni osi. Omejimo se torej na premice, ki potekajo skozi to točko. Zanje je $L_5(a, b) = L_5(a, \mu_y - a\mu_x) = \sum_{i=1}^n \frac{(a(x_i - \mu_x) - (y_i - \mu_y))^2}{2|a|}$, kar označimo z $f(a)$. Formulo poenostavimo:

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{i=1}^n \frac{a^2(x_i - \mu_x)^2 - 2a(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) + (y_i - \mu_y)^2}{2|a|} = \\ &= \frac{a^2 n \sigma_x^2 - 2anr\sigma_x\sigma_y + n\sigma_y^2}{2|a|} \end{aligned}$$

in opazimo, da je limita funkcije f tako proti $\pm\infty$ kot proti 0 enaka ∞ . Zato je minimum funkcije f dosežen v stacionarni točki. Velja

$$f'(a) = \frac{n}{2} \begin{cases} \sigma_x^2 - \frac{\sigma_y^2}{a^2} & a > 0 \\ -\sigma_x^2 + \frac{\sigma_y^2}{a^2} & a < 0 \end{cases},$$

torej je $f'(a) = 0$ natanko tedaj, ko je $a = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Ti dve vrednosti za a sta torej edini vrednosti, za katere ima funkcija f lokalni minimum. Da bi ugotovili, katera izmed njiju pripada globalnemu minimumu, ju vstavimo v funkcijo f . Dobimo

$$\begin{aligned} f\left(\pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right) &= \frac{n\sigma_x}{2\sigma_y} (\sigma_y^2 \mp 2r\sigma_y^2 + \sigma_y^2) = \\ &= n\sigma_x\sigma_y(1 \mp r). \end{aligned}$$

Sledi, da ima za $r = 0$ funkcija f dva globalna minimuma, in sicer pri $a = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Če je $r > 0$, je minimum dosežen pri $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, za $r < 0$ pa pri $a = -\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. \square

Neposredno iz izrekov 2, 5 in 6 sledi naslednja zanimiva posledica, ki povezuje regresijski premici za spremenljivki x in y , glavno os in reducirano glavno os.

Posledica 7. Za $r \neq 0$ in $\sigma_x = \sigma_y$ glavna os in reducirana glavna os sovpadeta, regresijski premici za spremenljivki x in y pa sta glede na njihju simetrični.

Dokaz. Vse štiri premice potekajo skozi (μ_x, μ_y) . Za $r \neq 0$ in $\sigma_x = \sigma_y$ po izrekih 2 in 6 glavna in reducirana glavna os sovpadeta, namreč vzporedni sta s simetralo lihih kvadrantov, če je $r > 0$, oziroma s simetralo sodih kvadrantov, če je $r < 0$. Iz $\sigma_x = \sigma_y$ po izreku 5 sledi, da lahko za smerna vektorja regresijskih premic za spremenljivki x in y zaporedoma izberemo $(r, 1)$ in $(1, r)$. Ker sta ta dva vektorja enako dolga, njuna vsota $(r+1, r+1)$ kaže v smer simetrale med premicama, ki je torej vzporedna simetrali lihih kvadrantov, kar dokaže posledico. \square

Izrek 6 nam pove, da lahko reducirano glavno os izračunamo v linearnem času. Nekaj o njeni uporabi lahko najdemo v [3], kjer avtor priporoča uporabo te premice v primeru, da smo naše začetne točke pridobili z merjenjem, pri čemer smo lahko naredili napako tako pri abscisah kot ordinatah točk. Torej v podobnih primerih kot glavno os in premico najkrajših razdalj.

6. Sklep

Čeprav se za linearno aproksimacijo danih točk v ravnini najpogosteje uporabljata standardni regresijski premici, pa smo v tem prispevku predstavili še pet drugih smiselnih načinov za linearno aproksimacijo točk. Kateri način je najboljši? Vsak ima nekaj prednosti in slabosti in vsaka od opisanih premic ima svoj kriterij, po katerem je optimalna. Pri izbiri kriterija je dobro upoštevati specifični kontekst, razlog, zakaj potrebujemo premico.

Če imamo ogromno podanih točk, recimo 10^9 , bomo želeli linearen algoritem za izračun enačbe premice. Tako bomo izbirali med glavno osjo, reducirano glavno osjo in standardnima regresijskima premicama. Če želimo kriterij, ki je neodvisen od postavitve koordinatnega sistema, bomo izbirali med glavno osjo in premico najkrajših razdalj. Če želimo, da osamelci oz. točke, ki so dlje od končne premice, nimajo poudarjenega vpliva v kriterijski funkciji, si v njej ne želimo kvadratnih členov, zato bomo izbirali med premico najkrajših razdalj in premicama najkrajših vodoravnih ter najkrajših navpičnih razdalj. Lahko pa želimo ravno obratno, t.j., da točke, ki so dlje od premice, kriterijski funkciji prispevajo bistveno več kot točke, ki so ji bliže. V tem primeru bi uporabili eno od preostalih štirih

premic. Zaradi razširjenosti uporabe in implementacij v različnih programih je najpreprostejša uporaba standardnih regresijskih premic. Ti dve premici tipično uporabimo, ko imamo asimetrično vzročno-posledično povezavo med spremenljivkama: pojasnjevalno spremenljivko dojemamo kot vzrok in njene vrednosti so pogosto brez merske napake, odvisno pa kot posledico. Če bomo uporabili katero od standardnih regresijskih premic, nas skoraj gotovo nihče ne bo vprašal: "Zakaj ste se odločili za ta model?" Če pa bomo uporabili kateri drug model, pa moramo znati utemeljiti, zakaj smo ga izbrali. Pri že omenjenem problemu z železniško progo iz zadnjega odstavka 1. razdelka je naravna izbira premica najkrajših razdalj. Vendar pa je le-ta računsko zelo zahtevna: težko pridemo do nje, če imamo danih ogromno, recimo 10^9 točk. V tem primeru je smiselni približek glavna os, ki jo znamo izračunati v linearnem času $O(n)$. Le-ta je še vedno neodvisna od izbire koordinatnega sistema.

Izpostavili bi tudi dejstvo, da lahko po treh od opisanih kriterijev za optimalnost najdemo optimalno premico, ki poteka skozi dve izmed danih točk. Gre za premico najkrajših razdalj ter premici najkrajših vodoravnih in najkrajših navpičnih razdalj. Dijaki, ki želijo dane točke aproksimirati s premico, sprva pogosto izberejo dve izmed točk in skoznju potegnejo premico, saj to znajo storiti že v prvem letniku gimnazije. Izreka 1 in 4 nam povesta, da lahko tudi na ta način dobimo premice, ki točke (po smiselnem kriteriju) najbolje aproksimirajo. Težava pa je, da točki, skozi kateri poteka *optimalna* premica, ne gre tako zlahka najti.

Upamo, da je bil naš izbor premic in njihovih lastnosti bralcu zanimiv.

LITERATURA

- [1] R. James Carr. Orthogonal regression: A teaching perspective. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43:134–143, Jan. 2012.
- [2] Van Dečko. Nov kriterij za določitev premice, ki aproksimira dane točke v ravnini. Objavljeno v: 53. Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije 2019, Zbornik, stran 186. Zveza za tehnično kulturo Slovenije, 2019.
- [3] Yadolah Dodge. *The Concise Encyclopedia of Statistics*, poglavje Least Absolute Deviation Regression. Springer New York, 2008.
- [4] Nimrod Megiddo in Arie Tamir. Finding Least-Distances Lines. *Siam Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 4(2):207–211, Jun. 1983.
- [5] Richard J. Smith. Use and Misuse of the Reduced Major Axis for Line-Fitting. *American Journal of Physical Anthropology*, 140:476–486, Nov. 2009. 16

RAČUNSKA METODA DOLOČANJA ASTRONOMSKEGA POLOŽAJA OPAZOVALCA

ALEKSANDER GRM¹

¹Fakulteta za pomorstvo in promet Univerze v Ljubljani

Ključne besede: navigacija

Določanje položaja ladje s pomočjo astronomskih teles je bila včasih edina natančna metoda določanja položaja ladje na oceanih oziroma odprtih morjih. Astronomski položaj ladje se je določil s pomočjo grafične metode, ki temelji na podatku o domnevem položaju opazovalca. Domnevni položaj opazovalca so na ladji določili s pomočjo seštete navigacije. V pričujočem delu je tako predstavljena metoda določanja položaja, ki ne potrebuje podatka o domnevem položaju opazovalca. Prikažemo izpeljavo enačb za določitev astronomskega položaja s pomočjo računske metode, ki temelji izključno na reševanju enačb sferne trigonometrije. Metoda je analitičnega tipa in določi položaj opazovalca samo z uporabo koordinat pod-zvezdnih točk in izmerjene višine nebesnega telesa.

A DIRECT METHOD FOR DETERMINATION OF THE CELESTIAL FIX

Celestial positioning was the only accurate method of determining a ship's position on the oceans or the high seas. The celestial position of a vessel was determined using a graphical method based on the assumed position of the observer. The assumed position of the ship was usually determined by dead reckoning. This article, therefore, presents a method for determining the position that does not require the assumed position of the observer. In this article, we show the derivation of the equations needed to determine the celestial position using a calculation method based solely on the solution of the equations of spherical trigonometry. The technique is analytical and determines the observer's position by using only a pair of celestial geographic position points and the measured altitude of the celestial body.

1. Uvod in opis problema

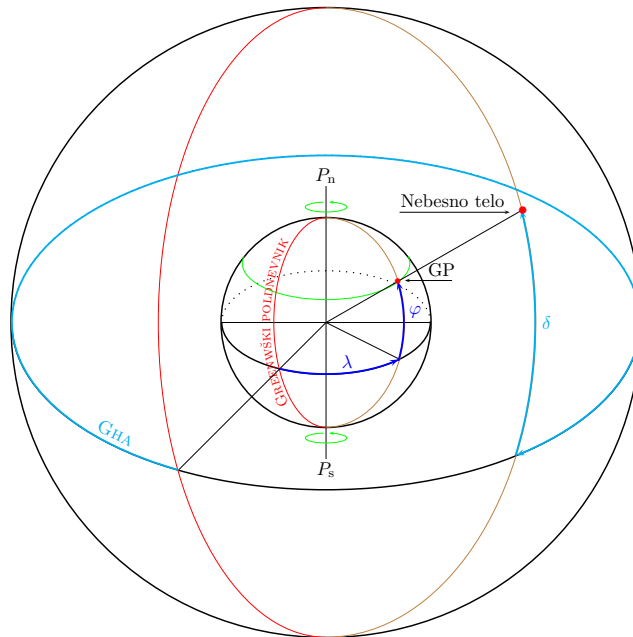
Astronomska navigacija je način določanja položaja, ki je popolnoma neodvisen od zunanjih virov. Potrebujete le točno uro, žepni računalnik s formulami in efemeride navigacijskih nebesnih teles [1, 2, 3]. Zakaj je astronomska navigacija še vedno tako pomembna pomorska veščina, se kaže prav v sodobni praksi navigacije. Vse več je motenj signala GNSS (Global Navigation Satellite System) naprav in s tem namenskega spreminjanja pravega satelitskega položaja ladje. To se dogaja z namenom terorizma, piratstva in drugih paravojaških akcij, s katerim bi radi pirati ladje pripeljali na položaj, kjer bi jih lahko enostavno zasegli.

Metodo, ki se na ladji večinoma uporablja za določanje astronomskega položaja, imenujemo višinska metoda (angl. Intercept Method), ki jo je

razvil Marcq de Blonde de Saint-Hilaire [4]. Lep opis metode in uporabe najdemo v knjigah *Celestial Navigation* [2, 5]. Za določitev položaja potrebujemo sekstant, točno uro in astronomske podatke nebesnih teles.

S pomočjo sekstanta lahko določimo višino nebesnega telesa zelo natančno. Natančnost izmerjenega kota s sekstantom je na desetinko ločne minute, kar omogoča posebna skala na meritvenem koleščku. Tukaj je prav omeniti, da je natančnost meritve odvisna od merilca, kako natančno roko ima in kakšne so razmere na odprtem morju, ki je povezano v stopnjo valovanja in s tem nihanja ladje. Poleg napake meritve je še napaka v lomu svetlobe skozi atmosfero. Tukaj sta prisotni dve napaki, in sicer napaka depresije horizonta, kamor s sekstantom potopimo nebesno telo, in napaka zaradi refrakcije. Napako v izmerjeni višini zaradi refrakcije lahko popravimo z uporabo enega od matematičnih modelov, kot na primer model po Benettu [6]. Tako lahko celotno napako zaradi refrakcije enostavno določimo s pomočjo izbranega modela atmosfere in popravimo izmerjeno višino. Prav tako se je treba zavedati, da model ni popolnoma natančen in je samo približek realnega stanja. Napaka v lomu svetlobe je tako še vedno prisotna, vendar v manjši meri. Enačbe sferne trigonometrije, ki jih uporabljamo za izračune v astronomski navigaciji, temeljijo na domnevi, da so točke oglišč astronomskega navtičnega sfernega trikotnika v centru nebesnih teles.

Ob izmeri višine je treba določiti tudi natančen čas meritve, ki naj bo vsaj na 5 sekund natančen. Napaka v času je povezana z napako določitve parametrov koordinat nebesnega telesa, ki se spreminjajo s časom. Koordinati nebesnega telesa sta deklinacija in greenwiški časovni kot ali samo časovni kot, če ni mišljeno drugače. Na sliki 1 je prikazan koordinatni sistem nebesnih teles s koordinatama: *deklinacija*, ki jo označimo z δ in *časovni kot*, ki ga označimo z GHA (okrajšava za angleški izraz Greenwich Hour Angle). Greenwiški časovni kot zvezde določimo s pomočjo GHA točke pomladišča in sideričnega časovnega kota (SHA - Sidereal Hour Angle). Točko pomladišča dobimo s pomočjo presečišče ravnine ekliptike in ravnine nebesnega ekvatorja, SHA pa je tako časovni kot od točke pomladišča do poldnevnika, ki prečka nebesno telo [7]. SHA in deklinacija zvezde, se zelo počasi spreminjata, v primerjavi z drugimi navigacijskimi nebesnimi telesi. Pri navigacijskih planetih, to so Venera, Mars, Jupiter in Saturn, ter Soncu in Luni, se ti dve količini zaradi njihove bližine Zemlji spreminjata bistveno hitreje kakor pri zvezdah. Časovni kot se meri v zahodni smeri od greenwiškega ali izhodiščnega ali ničtega poldnevnika, do poldnevnika, ki teče skozi položaj nebesnega telesa. Na sliki 1 sta poldnevnika prikazana kot polkroga. Od sedaj postavimo ime greenwiški poldnevnik, za poldnevnik, ki določa izhodišče za določitev velikosti časovnega kota. Na sliki 1 je prikazan greenwiški poldnevnik z rdečo krožnico, poldnevnik skozi nebesno telo pa z rjavo barvo. Časovni kot merimo vedno v smeri proti zahodu in ima

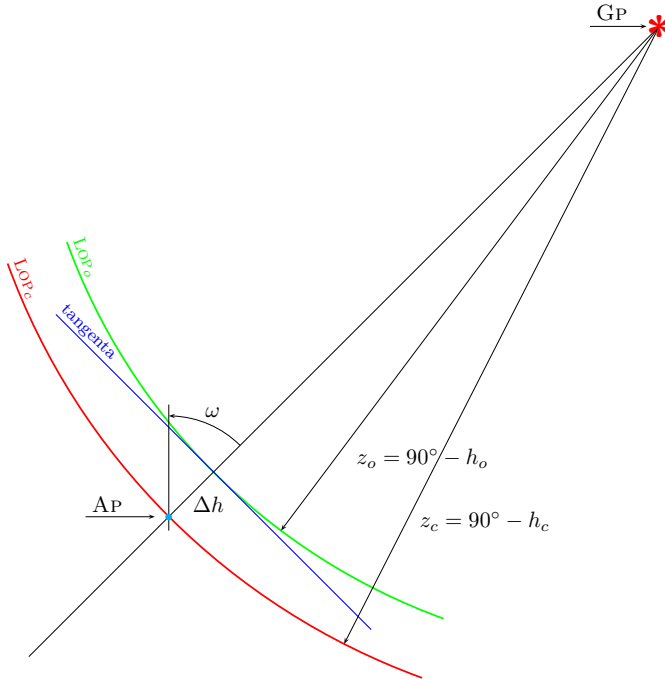


Slika 1. Na sliki je prikazano, kako je videti projekcija astronomskih koordinat nebesnega telesa (deklinacija δ in časovni kot GHA) iz nebesne sfere, na površje Zemlje, kjer dobimo tako imenovano pod-zvezdno točko ali točko GP (Geografski Položaj, angl. Geographic Position) z geografskimi koordinatami širine φ in dolžine λ . Zveznica med centrom Zemlje in centrom nebesnega telesa prebada zemeljsko površino v točki GP.

vrednosti v intervalu $[0^\circ, 360^\circ)$, kjer ima vrednost 0° za telo, ki se nahaja točno na greenwiškem poldnevniku. Časovni kot tako predstavlja koordinato nebesnega telesa, podobno, kot je geografska dolžina opazovalca na Zemlji, ki je na sliki 1 označena s črko λ . Druga koordinata nebesnega telesa je deklinacija, ki se meri od astronomskega ekvatorja v smeri proti severu in smeri proti jugu, kjer dosega vrednosti v intervalu $[-90^\circ, 90^\circ]$. Negativna vrednost predstavlja vrednost na južni hemisferi. Na sliki 1 je označena s črko δ . Deklinacija je podobna koordinata kot geografska širina opazovalca na Zemlji, ki jo označimo s črko φ . Za enostavno določevanje astronomskih podatkov nebesnih teles, med njimi sta omenjeni koordinati, so za pomorščake izdelani astronomski almanahi, ki jih izdajajo različni izdajatelji, kot sta recimo *Brown's Nautical Almanach* in *Admiralty Nautical Almanach - NP314*. Možna in tudi priznana je uporaba različnih astronomskih računalniških programov. Recimo, avtor za potrebe astronomskih izračunov

uporablja Python[®] knjižnico SkyField [8], ki je izjemno natančna in nudi podatke o zvezdah, planetih in naravnih satelitih.

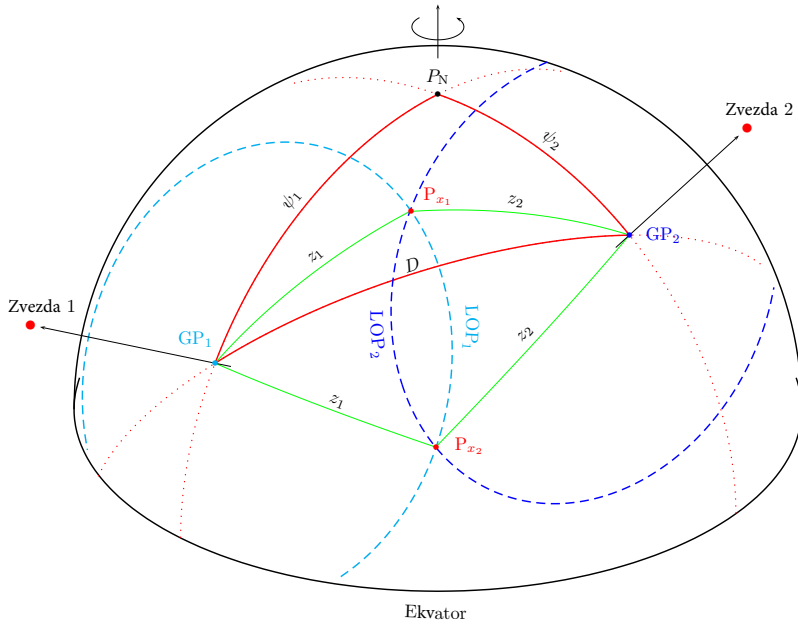
Naslednji korak je določitev astronomskega položaja opazovalca. Možnosti sta recimo dve, z uporabo grafične metode ali pa z računsko metodo, ki je tudi osrednja tema tega prispevka. Na kratko opišimo postopek grafične metode določevanja astronomskega položaja, ki jo imenujemo *višinska metoda* ali v angleščini *sight reduction*. Metodo je izdelal francoski pomorščak Marcq de Blond Saint-Hilaire [4]. Metoda temelji na izrisu položajnih linij, kjer je presečišče astronomski položaj opazovalca. Za določitev položajne linije potrebujemo več podatkov, začetna podatka sta podatka meritve, in sicer izmerjena višina nebesnega telesa h_o in čas meritve t_o . Indeks o v tem primeru izhaja iz besede *opazovana*. Nato s pomočjo domnevnega položaj opazovalca AP (Apparent Position), lahko izračunamo višino merjenega nebesnega telesa h_c in smer ω na podzvezdno točko GP iz točke AP. Položajna linija tako predstavlja premico, to je tangenta na položajno krožnico v okolici, kjer se nahaja opazovalec, kakor je prikazano na sliki 2. Kaj točno je položajna krožnica, si lahko bralec nazorneje ogleda na sliki 3, kjer je označena kot LOP (Line of Position) in je prikazana za dve nebesni telesi. Na sliki 2 imamo prikazani dve položajni krožnici. Rdeča krožnica je krožnica, ki jo določa izračunana višina, kot da bi bil opazovalec na domnevnem položaju AP, zelena krožnica pa je krožnica določena z višino, ki smo jo določili s pomočjo sekstanta. Nekje na zeleni krožnici se nahaja opazovalec. Izris krožnice je za uporabo na pomorskih kartah nemogoč. Razlog tiči v projekciji in merilu karte ter v tem, kam postaviti center šestila. Po navadi je GP zelo daleč stran. Ker pa ima krožnica zelo velik polmer, jo lahko v okolici položaja približno narišemo prav s premico, ki je v tem primeru modra tangentna linija in predstavlja premico, na kateri se nahaja opazovalec. Kot smo že omenili, v primeru grafične določitve astronomskega položaja opazovalca potrebujemo domnevni položaj opazovalca AP, s pomočjo katerega lahko izračunamo smer na nebesno telo ω in določimo razliko v izmerjeni in izračunani višini nebesnega telesa Δh , kakor je prikazano na sliki 2. Razlika v višini Δh je določena kot razlika med izmerjeno višino h_o in izračunano višino h_c ($\Delta h = h_o - h_c$). V primeru, da je razlika višin negativna, se Δh nanaša na vrednost, ki je usmerjena v smeri $\omega + 180^\circ$ od točke AP. S pomočjo teh dveh podatkov za dve ali več nebesnih teles, lahko skonstruiramo grafičen položaj opazovalca. Tako dobimo presečišče dveh ali več premic (tangent), ki določajo astronomski položaj opazovalca. Število premic je odvisno od števila izmerjenih nebesnih teles. Po navigacijskem protokolu je treba vsakič izmeriti vsaj tri nebesna telesa, seveda, če je to mogoče, ker je tako tretji podatek dodan kot kontrola v postopku. Ob izrisu položaja s tremi nebesnimi telesi dobimo po navadi položajni trikotnik, pri čemer je njegovo težišče astronomski položaj ladje. Velikost trikotnika je odvisna



Slika 2. Na sliki je prikazano grafično načrtovanje astronomskega položaja. V točki AP je domnevni položaj opazovalca, ki ga potrebujemo za izračun ω in z_c . Opazovalec se nahaja nekje na tangenti, ki jo določa višina izmerjena s sekstantom $h_o = 90^\circ - z_o$. Smer ali azimut do podzvezdne točke GP označimo ω . Linija, na katerih se nahaja opazovalec, ki izmeri enako višino, je položajna linija LOP in je jasneje prikazana na sliki 3.

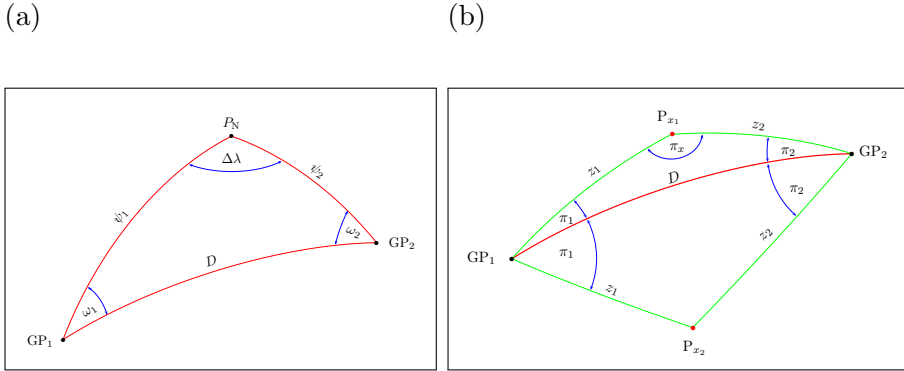
od praktičnih sposobnosti navigatorja, kako dobro zna uporabljati sekstant. Vrednosti so v praksi nekaj ločnih minut, kar pomeni napako v položaju ladje nekaj navtičnih milj.

Opisana metoda je grafična in je bila izjemno uporabna, dokler so bile na ladjah papirnate karte. Danes se na ladjah pospešeno uvajajo elektronske karte in elektronski navigacijski sistem imenovan ECDIS (Electronic Chart Display and Information System [9]). Trenutno ECDIS ne omogoča preprostega vrisovanja astronomskega položaja, kakor je bilo opisano v prejšnjem odstavku o grafični metodi, ampak je treba za vris položaja zelo zakomplicirati vnos podatkov za določitev položaja. ECDIS tako še nima izdelanega modula za astronomsko navigacijo. Najbolj naravna se zdi integracija ECDIS z računskim postopkom določevanja astronomskega položaja, ki ne



Slika 3. Slika prikazuje osnovne sferne trikotnike. Na sliki sta prikazani pod zvezdni točki dveh nebesnih teles GP_1 in GP_2 in njima pripadajoči krožnici istih višin LOP_1 in LOP_2 , ki sta določeni z zenitnima razdaljama z_1 in z_2 .

potrebuje podatka o domnevnem položaju opazovalca. Metode, ki ne uporabljajo domnevnega položaja opazovalca, imenujemo *direktne metode*. Na to temo obstaja veliko literature, kjer so opisane različne direktne metode. Poznamo metode analitičnega določevanja položaja [10, 11, 12, 13], med njimi je najbolj poznana metoda [14]. Imamo tudi numerične metode, pri katerih je treba za izračun položaja narediti nekaj iteracij [15, 16, 17, 18, 19, 20]. Direktne metode so tako naravne metode v ECDIS sistemu za določanje astronomskega položaja. Poleg integracije v ECDIS so direktne metode tudi drugače uporabne v alternativnih metodah določevanja astronomskega položaja. Kot primer lahko omenimo način, kjer meritev s sekstantom nadomestimo z meritvijo s pomočjo pametne naprave. Uporaba pametnega telefona, kot primer pametne naprave, spada med ene od takih možnih alternativnih metod. Danes imajo pametni telefoni kar nekaj različnih senzorjev, med njimi tudi senzorje naklona. S primerno uporabo in metodo jih lahko spremenimo v digitalni sekstant, ki hkrati že izračuna astronomski položaj. Eden od takih poskusov je opisan v prispevku [21], kot alternativni sistem za določanje astronomskega položaja, brez uporabe sekstanta in kart.



Slika 4. Slika prikazuje postavitev sfernih trikotnikov I in II z imeni stranic in kotov, ki jih bomo uporabili v postopku izpeljave.

V pričujočem delu bomo prikazali stabilno metodo računskega reševanja določitve astronomskega položaja s pomočjo meritve višine dveh nebesnih teles, brez uporabe domnevnega položaja. Taka računska metoda določa položaj kot presečišče dveh krožnic. V tem primeru imam skoraj vedno dve rešitvi. Tukaj lahko omenimo, da navigator na ladji vedno pozna ocenjeni položaj in tako lahko vedno določi, kateri od dveh izračunanih položajev je pravilen. Seveda, razen v primeru, če sta položaja zelo blizu, kot je recimo prikazano na sliki 6 (položaj 23, razdalja med položajema cca. 700 Nm, še vedno veliko). Metoda je v osnovi zelo podobna Kotlaričevi K-12 metodi [16], vendar je končna določitev položaja bolj enostavna, ker vsebuje dodatne kontrolne pogoje. Kot smo že opisali, so poleg uporabnosti direktnih metod pri integraciji astronomskega opazovanja v elektronski navigacijski sistem, takšne metode dejansko edino orodje za določanje/izračun položaja za metode, ki uporabljajo drugačne, sodobne naprave za meritev višine nebesnih teles [21].

2. Metoda

V tem poglavju bomo prikazali izpeljavo enačb računske metode. Osnovne enačbe temeljijo na enačbah sferne trigonometrije. Vmes se pojavi nekaj očitnih pogojev, ki pa so zelo intuitivni in jih ni treba dokazovati. V nadaljevanju bo prikazana razdelitev problema na osnovne sferne trikotnike, kjer so ogljišča že znane opisane količine.

Z uporabo efemerid ali astronomskega programa lahko za vsako nebesno navigacijsko telo določimo njegovi nebesni ekvatorialni koordinati: *deklinacija* δ in *časovni kot* GHA, ki ju lahko nato spremenimo v koordinati pod-

zvezdne točke položaja na Zemlji. Povezava med nebesnimi ekvatorialnimi koordinatami nebesnega telesa in preslikavo na zemeljske geografske koordinate podzvezdne točke je prikazana na sliki 1. Preslikava koordinat je zelo preprosta in jo bomo prikazali po opisu uvodnih pojmov.

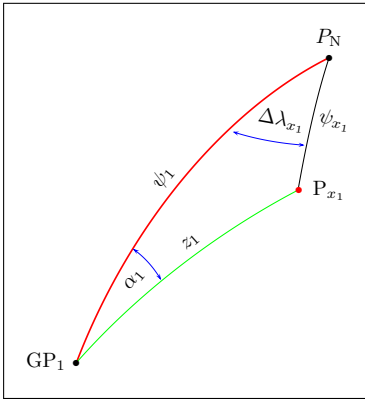
Deklinacija δ nebesnega telesa se meri od nebesnega ekvatorja proti severnemu in južnemu nebesnem polu in ima vrednosti v intervalu $\delta \in [-90^\circ, 90^\circ]$. Predznak deklinacije lahko spremenimo z oznako N ali S, kjer je N severna (pozitivna) deklinacija in S južna (negativna) deklinacija. Druga koordinata je časovni kot nebesnega telesa, ki je vezna na greenwiški meridian, zato mu pravimo lahko tudi greenwiški časovni kot. Dogovor je, da se GHA vedno meri v smeri proti zahodu od greenwiškega meridiana, in sicer ima vrednost v intervalu $\text{GHA} \in [0^\circ, 360^\circ)$. Takšen dogovor velja, ker se časovni kot povečuje s pretečenim časom. Ti dve koordinati sta tako koordinati v *nebesnem ekvatorskem* koordinatnem sistemu. V našem primeru bi radi določili položaj opazovalca na Zemlji, zato znani astronomski koordinati pretvorimo v *mestni ekvatorialni* koordinatni sistem, in sicer v *geografsko širino* φ in *geografsko dolžino* λ . Ti dve koordinati imata vrednosti v intervalu $\varphi \in [-90^\circ, 90^\circ]$ in $\lambda \in (-180^\circ, 180^\circ]$. Mogoče kot zanimivost. V ZDA označujejo zahodno geografsko dolžino s pozitivnim predznakom in vzhodno z negativnim. To je povezano s smešnim razlogom, da si nihče ne želi biti postavljen v vlogo negativca. Podobno zgodbo si delita tudi Univerza v Cambridgu in Univerza v Oxfordu.

Kot smo uvodoma omenili, je preslikava med nebesnimi koordinatami telesa in geografskim položajem podzvezdne točke podana kot

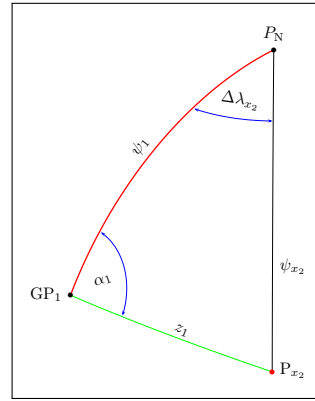
$$\begin{aligned} \varphi &= \delta \\ \lambda &= \begin{cases} -\text{GHA} & ; \text{GHA} \leq 180^\circ, \\ 360^\circ - \text{GHA} & ; \text{GHA} > 180^\circ. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Naslednji podatek, ki ga poznamo, je izmerjena višina nebesnega telesa h . S pomočjo zenitne razdalje z , ki jo določimo kot $z = 90^\circ - h$, lahko sedaj na zemeljski sferi narišemo krožnico okoli pod-zvezdne točke GP (Geographic Position), z radijem z , ki prikazujejo linijo istih višin LOP (Line of Position), kot je prikazano na sliki 3. Vsi opazovalci na LOP krožnici izmerijo enako višino nebesnega telesa. Situacija z dvema nebesnima telesoma je prikazana na sliki 3, kar je izhodišče našega problema. V primeru, če imamo izmerjeni višini dveh nebesnih teles, lahko določimo presečni točki P_{x_1} in P_{x_2} , ki sta točki, kjer se nahaja opazovalec, ki je izmeril višini h_1 in h_2 . Napaka v določitvi presečišča je povezana z napako v izmerjeni višini in kotom, pod katerim se sekata krožnici. Bolj kot je presečišče med

(a)



(b)



Slika 5. Slika prikazuje postavitev sfernih trikotnikov III z imeni stranic in kotov, ki jih bomo uporabili v postopku izpeljave.

krožnicama pravokotno, manjša je površina, ki predstavlja površino, kjer se lahko nahaja opazovalec in s tem je napaka v določitvi položaja opazovalca manjša. Napaka presečišča krožnic, kot položaj opazovalca, je obremenjena tudi z gibanjem opazovalca med meritvijo. Eden od možnih načinov za določitev popravka v višini zaradi gibanja opazovalca, je ponovitev meritve višine nebesnega telesa. Tako dobimo linearno zvezo za časovno odvisno spremembo višine in lahko nato vse izmerjene višine sinhroniziramo na isti srednji čas. Napaka linearne zveze je majhna, če sta zaporedni meritvi časovno zadosti blizu, saj se časovni kot spreminja zelo hitro (cca. $1/4$ stopinje v 1 minuti).

V nadaljevanju bomo prikazali, kako izračunamo točki opazovalca P_{x_1} in P_{x_2} . Vemo, da se opazovalec nahaja v eni od dveh točk. Izločitev lahko naredimo s pomočjo izmere višine tretjega nebesnega telesa. Tukaj se skriva novi pogoj, zaradi katerega opisana metoda ne potrebuje podatka o domnevnem položaju opazovalca. Identifikacija pravilne veje položaja je v tem primeru narejena s pomočjo izmere tretjega nebesnega telesa in tako lahko določimo pravi položaj opazovalca. V primeru, da sta nebesni telesi izbrani tako, da je razlika med izračunanima položajema velika, je rešitev trivialna, saj pomorščak med plovbo vseskozi pozna svoj približen položaj.

V postopku izpeljave bomo uporabili tri sferne trikotnike, in sicer (glej sliko 3):

- I - prvi: $GP_1 - P_N - GP_2$,
- II - drugi: $GP_1 - P_{x_1} - GP_2$, $GP_1 - P_{x_2} - GP_2$,

- III - tretji: $GP_1 - P_N - P_{x_1}$, $GP_1 - P_N - P_{x_2}$.

Na sliki 4a je prikazan sferni trikotnik I, na sliki 4b pa sta prikazana sferna trikotnika II za obe točki presečišča. Na sliki 5a in 5b sta prikazana sferna trikotnika III za obe točki presečišča. Vsi sferni trikotniki skupaj so prikazani na sliki 3, kjer je lepo vidna njihova povezava.

V vsakem sfernem trikotniku imamo znane in neznanе količine. Tako bomo obravnavo razdelili na posamezne sferne trikotnike in spremenljivke povezali med seboj.

I. sferni trikotnik

V I. sfernem trikotniku imamo znane spremenljivke

- $\psi_1 = 90^\circ - \varphi_1$,
- $\psi_2 = 90^\circ - \varphi_2$,
- $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

Geografski koordinati (φ, λ) dobimo kot koordinati pod-zvezdne točke GP. Tukaj je treba poudariti, da vedno označimo točko GP_1 kot točko, ki je zahodno od točke GP_2 . Neznanki v I. sfernem trikotniku sta stranica D in kot ω_1 , ki ju določimo s pomočjo kosinusnega izreka za stranico sfernega trikotnika, to je stranico D in ψ_1

$$\begin{aligned} \cos D &= \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \Delta\lambda, \\ \cos \omega_1 &= \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2 \cos D}{\sin \psi_1 \sin D}. \end{aligned} \quad (2)$$

II. sferni trikotnik

V II. sfernem trikotniku imamo znane spremenljivke

- $z_1 = 90^\circ - h_1$, $z_2 = 90^\circ - h_2$ in D .

S kosinusnim izrekom za stranico z_2 lahko določimo kot π_1 , ki ga potrebujemo za nadaljnji izračun

$$\cos \pi_1 = \frac{\cos z_2 - \cos D \cos z_1}{\sin D \sin z_1}. \quad (3)$$

III. sferni trikotnik

V III. sfernem trikotniku imamo znane spremenljivke

Tabela 1. Podatki o nebesnih telesih so v stopinjah in decimalnih minutah, razen za azimut, ki je v decimalnih stopinjah.

nt	ime	višina	azimut	deklinacija	GHA
1	Alioth	34° 55.18'	43.21°	55° 49.55'	282° 11.06'
2	Sirius	28° 14.81'	180.45°	-16° 45.12'	14° 24.79'
3	Hamal	30° 24.64'	273.95°	23° 34.56'	83° 50.30'

- z_1, ψ_1 in $\alpha_1 = \omega_1 \pm \pi_1$,

in lahko določimo ψ_{x_i} in kot $\Delta\lambda_{x_i}$, kjer je $i = 1, 2$. Sedaj je treba paziti, da določimo kot α_1 na način

$$\alpha_1 = \begin{cases} \omega_1 - \pi_1; & \text{za točko } P_{x_1} \\ \omega_1 + \pi_1; & \text{za točko } P_{x_2}, \end{cases}$$

tako lahko določimo neznanki

$$\begin{aligned} \cos \psi_{x_i} &= \cos z_1 \cos \psi_1 + \sin z_1 \sin \psi_1 \cos \alpha_1, \\ \cos \Delta\lambda_{x_i} &= \frac{\cos z_1 - \cos \psi_1 \cos \psi_{x_i}}{\sin \psi_1 \sin \psi_{x_i}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Tukaj je treba povedati, da je velika krožnica, ki poteka skozi točki P_{x_1} in P_{x_2} in jo označimo s K_S , simetrala. Krožnica K_S seka veliko krožnico, ki poteka skozi točki GP_1 in GP_2 in jo označimo s K_P , pod pravim kotom in tako razdeli na dva pravokotna sferna trikotnika. Lok med točkama GP_1 in GP_2 razdeli lok med točkama P_{x_1} in P_{x_2} točno na polovico. Ker sta krožnici K_S in K_P pravokotni, sta tako zgornji kot π_1 in spodnji kot π_1 enaka, zato ju tudi enako označimo. Videnje, da sta kota π_1 enaka, zato poenostavi izračun obeh položajev, kar je tudi drugačnost te metode od preostalih.

Skoraj smo že pri koncu, le še izračunane podatke spremenimo v položaj opazovalca ($\varphi_{\text{opaz}_i}, \lambda_{\text{opaz}_i}$). Pri položaju opazovalca imamo dve možnosti, saj je rešitev presek dveh krožnic v dveh točkah, razen za primer, ko se krožnici dotikata. Pri koordinatah opazovalca smo zato uporabili indeks i , ki ima vrednosti 1 ali 2, položaj 1 ali položaj 2.

Položaj opazovalca smo označili z 1 in 2, odvisno kateri α_1 smo uporabili za izračun ψ_{x_i} in $\Delta\lambda_{x_i}$. Položaj opazovalca $P_{x_i} = (\varphi_{\text{opaz}_i}, \lambda_{\text{opaz}_i})$ izračunamo na naslednji način

Tabela 2. Rezultati izračunanih položajev za podatke iz Tabele 1

	P_{x_1}		P_{x_2}	
	φ_1	λ_1	φ_2	λ_2
1-2	45° 00.00' N	14° 00.00' W	25° 57.71' N	23° 51.23' E
1-3	78° 16.52' N	115° 56.30' W	45° 00.00' N	14° 00.01' W
2-3	44° 59.98' N	14° 00.03' W	35° 31.01' N	21° 58.48' W

$$\varphi_{\text{opaz}_i} = 90^\circ - \psi_{x_i},$$

$$\lambda_{\text{opaz}_i} = \begin{cases} \lambda_1 + |\Delta\lambda_{x_i}| & ; \alpha_1 \in [0^\circ, 180^\circ], \\ \lambda_1 - |\Delta\lambda_{x_i}| & ; \alpha_1 \in (180^\circ, 360^\circ). \end{cases} \quad (5)$$

V zgornji enačbi imamo pogoj glede velikosti kota α_1 , s katerim določamo predznak pri izračunu geografske dolžine opazovalca. Tako je v enačbi (5) treba predznak $\Delta\lambda_{x_i}$ določiti glede na vrednost kota α_1 , jasno za oba položaja P_{x_1} in P_{x_2} moramo storiti enako. Grafična razlaga se lepo vidi na sliki 5, kjer lahko enostavno razberemo, zakaj je treba $|\Delta\lambda_{x_i}|$ enkrat prišteti in drugič odšteti, glede na pogoj v enačbi (5). V enačbi (5) se meri kot α_1 kakor navigacijski azimut, kjer je severo-južna smer podana s poldnevnikom (rdeči del krožnice), ki prečka točko GP_1 , kakor je prikazano na sliki 5. Tako ima α_1 podane vrednosti v intervalu $[0^\circ, 360^\circ)$.

Kot vidimo, je postopek zelo preprost in kar je najlepše, vseskozi uporabljamo samo kosinusni izrek za stranico sfernega trikotnika. S kosinusnim izrekom za stranico imamo zagotovljeno stabilnost izračuna tudi na predznak natančno. Opisani postopek je tako računsko stabilen, kjer moramo le paziti, katero rešitev izberemo.

3. Rezultati

Metodo smo testirali na dveh različnih primerih. Vsak primer vsebuje meritev treh različnih nebesnih teles. S tremi nebesnimi telesi lahko tvorimo tri različne pare, s katerimi lahko izračunamo položaj opazovalca. Višina nebesnega telesa je izračunana s pomočjo izbranega položaja opazovalca. Položaj opazovalca, ki je bil uporabljen za določitev višine nebesnega telesa, lahko tako uporabimo kot kontrolo, s katero lahko natančno določimo

Tabela 3. Podatki o nebesnih telesih so v stopinjah in decimalnih minutah razen za azimut, ki je v decimalnih stopinjah.

nt	ime	višina	azimut	deklinacija	GHA
1	Dubhe	$50^{\circ} 08.48'$	41.95°	$61^{\circ} 37.23'$	$309^{\circ} 39.19'$
2	Pollux	$69^{\circ} 19.60'$	140.49°	$-27^{\circ} 58.10'$	$359^{\circ} 15.99'$
3	Mirfak	$56^{\circ} 11.71'$	296.89°	$49^{\circ} 56.94'$	$64^{\circ} 27.56'$

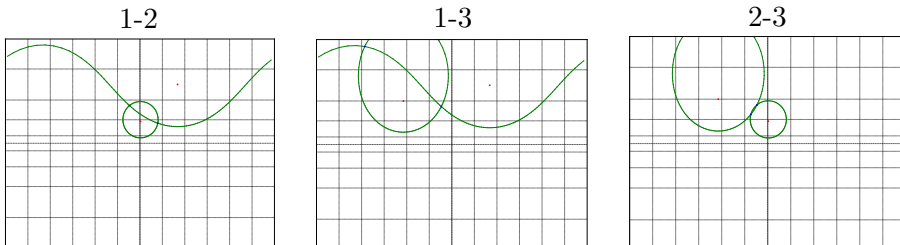
napako računske metode. Podatki o nebesnih telesih so podatki o realnih nebesnih telesih in jih lahko bralec preveri s pomočjo spletne aplikacije, ki jo je izdelal avtor za študentsko uporabo in se nahaja na povezavi <https://ocean.fpp.uni-lj.si/ocnav> pod zavihkom Efemeride. V obeh primerih je bil uporabljen enak položaj mirujočega opazovalca in enak čas meritve, za potrebe testiranja metode. Enako lahko privzamemo, če se opazovalec giblje počasi, kakor je po navadi na ladjah trgovske mornarice.

Podatki o položaju opazovalca in času meritve:

- položaj opazovalca: $\varphi = 45^{\circ} 00.0'N$, $\lambda = 14^{\circ} 00.0'W$,
- datum: 12 marec 2024,
- ura: 20:20:00 UT.

Primer 1

V tabeli 1 so prikazani podatki, ki smo jih uporabili kot prvi nabor podatkov o nebesnih telesih za izračun položaja. V izračunu uporabimo tri pare, in sicer 1-2, 1-3 in 2-3. Za vsak par določimo dve točki presečišča,



Slika 6. Prikaz točk GP, krožnic LOP in njihovih presečišč za primer 1, ki se navezujejo na Tabeli 1 in 2

kot je prikazano na sliki 6 in predstavljata položaja P_{x_1} in P_{x_2} . Rešitve za pare nebesnih teles iz tabele 1 so prikazane v tabeli 2. Na sliki 6, v primeru 2-3, sta rešitvi položaja opazovalca zelo skupaj in je presečišče položajnih linij pod zelo ostrim kotom. Ker imamo točne podatke, je tudi rešitev v tem primeru zelo natančna, minimalna napaka je lahko zgolj posledica zaokrožitve vhodnih podatkov na desetinko ločne minute. V primeru, če bi bili merski podatki obremenjeni z večjo napako, bi se tako napaka v izračunu položaja opazovalca lahko bistveno povečala. Zelo je zaželeno, da v primeru merskih podatkov z napako, narišemo ali izračunamo radij napake v položaju opazovalca.

Primer 2

V tabeli 3 so prikazani podatki, ki smo jih uporabili kot drugi nabor podatkov o nebesnih telesih za izračun položaja. Enako kot v primeru 1, v izračunu uporabimo tri pare, in sicer 1-2, 1-3 in 2-3. Za vsak par določimo dve točki presečišča, kot je prikazano na sliki 7 in predstavljata položaja P_{x_1} in P_{x_2} . Rešitve za pare nebesnih teles iz tabele 3 so prikazane v tabeli 4.

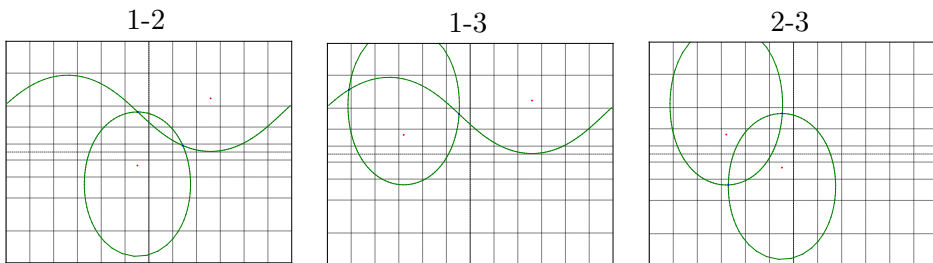
Rezultati izračunanih položajev so prikazani v tabelah 2 in 4. Grafična upodobitev rezultatov je prikazana na slikah 6 in 7. Primerjava rezultatov izračuna s položajem opazovalca, ki je bil izbran za določitev višin nebesnih teles, pokaže, da je napaka izračunanega položaja znotraj napake zaokroževanja vhodnih podatkov za izračun položaja opazovalca, kar smo pričakovali. Metoda izračuna je zelo preprosta in vsebuje le en dodaten pogoj pri določitvi geografske širine opazovalca v enačbi (5). Implementacija metode je narejena v `Jupyter.org`[®] okolju [22], ki je tudi prosto dosegljiva za uporabo in testiranje. Celoten program z vsemi podpornimi knjižnicami se nahaja na naslovu [23], v mapi `celestial_navigation`, program `calculate_astro_fix_03.ipynb`.

4. Diskusija in zaključek

V prispevku smo prikazali izpeljavo metode, ki je v začetku zelo podobna metodi K-12, ki jo je razvil znani hrvaški strokovnjak za področje navigacije dr. Stijepo Kotlarić že leta 1981 in jo objavil v reviji *Navigation* [16]. Naš prispevek se razlikuje v zaključnem delu izračuna in je v bistvu nekoliko bolj poenostavljena verzija podobnega izračuna. Opisana metoda je glede na avtorjevo poznavanje problematike ena najenostavnejših in zato

Tabela 4. Rezultati izračunanih položajev za podatke iz Tabele 3

	P_{x_1}		P_{x_2}	
	φ_1	λ_1	φ_2	λ_2
1-2	45° 00.00' N	14° 00.02' W	8° 09.47' N	42° 44.19' E
1-3	62° 45.48' N	152° 48.17' W	44° 59.99' N	14° 00.0' W
2-3	45° 00.0' N	14° 00.0' W	35° 57.94' S	81° 19.16' W

**Slika 7.** Prikaz točk GP, krožnic LOP in njihovih presečišč za primer 2, ki se navezujejo na Tabeli 3 in 4

zelo primerna kot pedagoška metoda za prikaz izračuna položaja opazovalca študentom navtika. Poleg je dodan tudi program, ki razlago še bolj približa uporabniku. Tako lahko neizkušen uporabnik na zelo preprost način testira izračun položaja opazovalca in ga primerja z grafično metodo [4]. Bistvo prikazane metode je usmerjeno prav v smer enostavnosti postopka in s tem dvigom motivacije neizkušenega uporabnika, da bi se podal na pot izračuna položaja z uporabo različnih programabilnih naprav. Veliko pomorščakov še vedno uporablja različne tablice kot pomoč pri določanju in izračunu položaja. V dobi računalnikov in zmogljivih pametnih naprav pa je uporaba računskih metod hitrejša in bolj zanesljiva metoda, v primerjavi z grafično metodo določitve položaja.

Metodo izračuna položaja opazovalca bomo uporabili in nadgradili za potrebe avtomatiziranega postopka določevanja astronomskega položaja. V tem primeru bomo izdelali žiroskop s kamero, ki je kardansko vpet in ima zelo natančne senzorje za meritev kotov v prostoru. To je pa lahko mogoče že tema za naslednji prispevek.

LITERATURA

- [1] J. Karl. *Celestial Navigation in the GPS Age*. Paradise Cay Publications, 2007.
- [2] T. Cunliffe. *Celestial Navigation*. Wiley, 2010.
- [3] D. Burch in T. Burch. *Celestial Navigation: A Complete Home Study Course*. Starpath Publications, 2015.
- [4] Marcq de Blond Saint-Hilaire. Calcul du point observé, méthode des hauteurs estimées. *Revue Maritime et Coloniale*, XLVI:341–376, 1875.
- [5] Umland H. A short guide to celestial navigation, 2011. URL <https://celnav.de>.
- [6] GG Bennett. The calculation of astronomical refraction in marine navigation. *The Journal of Navigation*, 35(2):255–259, 1982.
- [7] F. Avsec in M. Prosen. *Astronomija*. DZS, 1975.
- [8] B.C. Rhodes in B. de Vos. Skyfiled – Elegant astronomy for Python, 2024. URL <https://rhodesmill.org/skyfield>.
- [9] Wikipedia. ECDIS, 2024. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_navigational_chart.
- [10] MF A’Hearn in GS Rossano. Two body fixes by calculator. *Navigation*, 24(1):59–66, 1977.
- [11] GG Bennett. General conventions and solutions—their use in celestial navigation. *Navigation*, 26(4):275–280, 1979.
- [12] Stanley W Gery. The direct fix of latitude and longitude from two observed altitudes. *Navigation*, 44(1):15–24, 1997.
- [13] Torben Kjer. Unambiguous two body fix methods derived from crystallographic principles. *Navigation*, 28(1):52–54, 1981.
- [14] James A Van Allen. An analytical solution of the two star sight problem of celestial navigation. *Navigation*, 28(1):40–43, 1981.
- [15] CT Daub. A completely programmable method of celestial navigation. *Navigation*, 26(1):59–62, 1979.
- [16] S Kotlarič. K-12 method by calculator: A single program for all celestial fixes, directly or by position lines. *Navigation*, 28(1):44–51, 1981.
- [17] Thomas R Metcalf and Frederic T Metcalf. On the overdetermined celestial fix. *Navigation*, 38(1):79–89, 1991.
- [18] RE Ogilvie. A new method of celestial navigation. *Navigation*, 24(1):67–71, 1977.
- [19] Andres Ruiz Gonzalez. Vector solution for the intersection of two circles of equal altitude. *The journal of navigation*, 61(2):355–365, 2008.
- [20] Frankiskos Pierros. Stand-alone celestial navigation positioning method. *The Journal of Navigation*, 71(6):1344–1362, 2018.
- [21] G. Grm in A. Grm. Testing the functionality and applicability of smart devices for a handheld celestial navigation system. *NAŠE MORE*, 68(3):157–166, 2021.
- [22] Open Source Project. Jupyter Lab, 2024. URL <https://jupyter.org>.
- [23] Grm A.S. Ocean navigation for python, 2024. URL https://github.com/as-grm/on_class.

NOVE KNJIGE

Željko Oset: Pisma Georga Fabra Josipu Plemlju (*Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 2024*)

Akademik prof. dr. Josip Plemlj (1873-1967) je v zavesti slovenske matematične in fizikalne skupnosti še vedno močno prisoten kot duhovni oče slovenske matematike, prvi rektor današnje Univerze v Ljubljani in dolgoletni predavatelj temeljnih matematičnih predmetov študentom filozofske in tehniške fakultete. Na podobo Plemlja, kot jo poznamo še danes, je v veliki meri vplival njegov učenec akademik prof. dr. Ivan Vidav z leta 1973 izdano knjižico ob 100. obletnici Plemljevega rojstva, ki je bila namenjena (tudi) mlajšemu bralstvu in je bila z manjšimi popravki kasneje še večkrat ponatisnjena. To podobo so dopolnjevali tudi številni v zadnjih desetletjih objavljeni prispevki z novimi zgodovinskimi informacijami in spomini še živčih Plemljevih učencev, ki so jih zbirali in objavili nekateri starejši kolegi matematiki, na primer A. Suhadolc, M. Hladnik, M. Razpet, N. Razpet in drugi, v letu 2023 je bil ob 150. obletnici Plemljevega rojstva o Plemlju posnet tudi polurni dokumentarni film režiserja M. Zupaniča, ki je nastal v produkciji Univerze v Ljubljani in je brezplačno dosegljiv v arhivu RTVSlo.

V letu 2024 pa smo pod okriljem Slovenske akademije znanosti in umetnosti v knjižni zbirki Korespondence pomembnih Slovencev dobili še novo delo zgodovinarja dr. Željka Oseta, ki predstavlja poglobljeno študijo obsežne Plemljeve korespondence z nemškim matematikom Georgom Fabrom. Matematika, ki sta se spoznala v času Plemljevega podoktorskega študija na Kleinovem seminarju v Göttingenu, ko je bil Faber še študent, sta si začela dopisovati leta 1901 in si nato z občasnimi



Vsebina	
PREDGOVOR	7
JOSIP PLEMLJ IN Njegova intelektualna mreža – dopisovante z Georgom Fabrom	9
Josip Plemlj in oče	9
Vidavova oča in Plemljeva domača knjižnica	10
Učenci oče Gustav Encherich in prehod v Carnovico	16
Plemljeva biblioteka in domovinski knjižnica	18
Na prirediteljski obliki – odnosi z Richardom Zupaničom	24
Ljubljanska obliki – odnosi z Richardom Zupaničom	29
Ustanovitve univerze v Ljubljani	31
Plemlj in Fran Ramoni	33
Matematično-rodoljubni razred Akademije znanosti in umetnosti v Ljubljani	36
Siki z zgodovinskimi znamenitostmi	42
Priznanje in priznanje	43
Georg Faber in njegova dopisovanje z Josipom Plemljem	50
PISMA GEORGA FABRA JOSIPU PLEMLJU	61
LITERATURA IN VIRE	207
SUMMARY	215
ZUSAMMENFASSUNG	219
IMENSKO KAZALO	223
KRAJEVNO KAZALO	231

prekinitvami dopisovala do Fabrove smrti leta 1965. Korespondenca razkriva široko intelektualno mrežo znanstvenika, ki je bil na višku moči zelo dobro povezan s številnimi evropskimi matematiki, zaradi osebne narave pisanja pa prinaša o njegovem življenju in delu številna nova spoznanja.

Osetovo delo se začne z daljšo uvodno študijo. V njej avtor najprej predstavi nekaj vidikov Plemljeve osebnosti in osvetli njegove odnose z družinskimi člani, širšim sorodstvom in lokalnim okoljem. Nato opiše nekatere doslej manj znane okoliščine ob mejnikih na Plemljevi akademski poti, denimo pri nastavitvi za izrednega profesorja v Černovicah ali pri odločanju za nadaljevanje akademske kariere v Ljubljani. Veliko novega izvemo o Plemljevih pogledih na ustanavljanje univerze in univerzitetno politiko v času Kraljevine SHS, o njegovih pestrih, pogosto tudi konfliktnih odnosih z akademskimi kolegi v Ljubljani, ter o njegovi vlogi nestorja jugoslovan-skih matematikov po drugi svetovni vojni. Obsežni uvodni esej se zaključuje z opisom širših okoliščin Plemljevega dopisovanja s Fabrom.

Jedro dela nato predstavljajo transkripcije nemških izvornikov in slovenski prevodi 91 ohranjenih pisem in razglednic, ki jih je Faber ob različnih priložnostih pošiljal Plemlju. Skozi dopisovanje lahko spoznavamo številne karierne in družinske dogodke obeh protagonistov, zgodovinske dogodke in usode njunih matematičnih znancev predvsem v nemškem akademskem okolju, pa tudi številna razmišljanja o matematiki, lastnem delu in zapuščini. Vsako pismo je opremljeno s podatki o zunanjem videzu, datumu in kraju nastanka pisma ter z bogatimi opombami o v pismu omenjenih osebah, krajih, ustanovah, matematičnih problemih in podobno. Vse to bralcu omogoča celovito razumevanje in vživljanje v delo in življenjska vodila obeh znanstvenikov od njune skupne akademske mladosti do pozne starosti, kljub dejstvu, da imamo na voljo le Fabrove zapise, ne pa tudi Plemljevih odgovorov nanje. Zadnji v delo vključeni dokument je koncept Plemljevega pisma Fabrovi vdovi ob njegovi smrti.

Delo se zaključuje z bogatim seznamom virov, povzetkoma v angleščini in nemščini ter z obsežnim imenskim in krajevnim kazalom. Avtor knjige dr. Željko Oset je zgodovinar, ki je odličen poznavalec novejšje slovenske zgodovine in avtor več del o zgodovini slovenskih znanstvenih ustanov, med drugim tudi Zgodovine Slovenske akademije znanosti in umetnosti (2013). Njegova knjiga predstavlja izjemno dragocen prispevek k boljšemu razumevanju izjemnega človeka, perfekcionističnega matematika in znanstvenika, ki so ga pri delu vselej vodili najvišji ideali, neposrednega vpogleda v njegov intimni svet in življenje pa doslej nismo imeli. Knjigo je mogoče naročiti preko spleta v knjigarni Buča (www.buca.si) po ceni 17,00 EUR, v elektronski obliki pa je dostopna tudi na spletni strani SAZU (<http://www.sazu.si/publikacije-sazu-2024>).

Boštjan Kuzman

Vabilo



Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana

www.dmfa.si

Ljubljana, 30. 1. 2025

V A B I L O

Spoštovani člani in članice DMFA Slovenije,

Vljudno vabljeni na Občni zbor in Slavnostno akademijo ob 75-letnici društva DMFA Slovenije v četrtek, 6. marca 2025, v Vidavovi predavalnici (2.05) na Fakulteti za matematiko in fiziko, Jadranska ulica 21, Ljubljana.

17:00 Občni zbor društva DMFA Slovenije

Predlog dnevnega reda:

1. Uvodni pozdrav, preverjanje sklepčnosti in potrditev dnevnega reda.
2. Vabljeno poljudno predavanje: dr. Lev Vidmar, prejemnik Zoisovega priznanja 2024 za odkritje novih vzorcev obnašanja večdelnih kvantnih sistemov.
3. Imenovanje delovnega predsedstva in verifikacijske komisije.
4. Letno poročilo, program dela in finančni načrt.
5. Spremembe statuta društva.
6. Društvena priznanja.
7. Razno.

18:30 Odmor

19:00 Slavnostna akademija ob 75-letnici DMFA Slovenije

(predstavitev zgodovine društva z umetniškim programom, podelitev Plemljevih kovancev in pogostitev)

Vabilo za predloge prejemnikov društvenih priznanj

Člane in članice DMFA Slovenije vabimo k vložitvi predlogov za podelitev priznanja DMFA Slovenije za leto 2024. Priznanje lahko prejme posameznik ali posameznica za uspešno delo z mladimi ali za strokovno dejavnost, posameznice oz. posamezniki ali ustanove pa tudi za uspešno sodelovanje z Društvom (glej Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj - <https://www.dmfa.si/ODrustvu/DrustvenaPriznanja.aspx?id=DP>).

Predloge s pisno utemeljitvijo v dolžini do 2 strani A4 pošljite po e-pošti na naslov tajnik@dmfa.si do 17. februarja 2025. Predlog naj vsebuje kontaktne podatke nominiranca (domači naslov, telefon, e-pošta) in kontaktne podatke prvopodpisanega predlagatelja (telefon, e-pošta). Prispеле predloge bo pregledala Komisija za priznanja, ki bo tudi obvestila prejemnike in predlagatelje. Priznanja bodo podeljena na Občnem zboru.

Vabilo za predloge novih častnih članov DMFA Slovenije

Člane in članice DMFA Slovenije vabimo tudi k vložitvi predlogov za nove častne člane in članice DMFA Slovenije. Častni član Društva lahko postane oseba, katere strokovno ali pedagoško delo pomeni pomemben prispevek k razvoju matematičnih, fizikalnih ali astronomskih ved v Sloveniji ali k razvoju Društva (glej 8. člen Statuta DMFA Slovenije - <https://www.dmfa.si/odrustvu/PravilaDMFA.aspx?id=DMFA>).

Predloge s pisno utemeljitvijo v dolžini do 4 strani A4 pošljite po e-pošti na naslov tajnik@dmfa.si do 17. februarja 2025. Predlog naj vsebuje kontaktne podatke nominiranca (domači naslov, telefon, e-pošta) in kontaktne podatke prvopodpisanega predlagatelja (telefon, e-pošta). Zaželeno je, da predlog podpre skupina dolgoletnih članov društva. Častne člane imenuje Občni zbor na predlog Upravnega odbora.

V upanju, da se srečamo, vas lepo pozdravljam.

Dr. Mojca Vilfan, predsednica DMFA Slovenije

Mednarodno leto kvantne znanosti in tehnologije

Generalna skupščina Združenih narodov je razglasila leto 2025 za Mednarodno leto kvantne znanosti in tehnologije (angl. International year of Quantum Science and Technology, IYQ2025). Razglasitev Mednarodnega leta kvantne znanosti in tehnologije je priznanje pomena kvantne mehanike za razumevanje sveta ter njenega potenciala za razvoj inovativnih tehnologij, ki izkoriščajo nenavadne pojave, kot sta superpozicija stanj in kvantna prepletanost. V letu 2025 bodo številna znanstvena društva, univerze in raziskovalne ustanove po svetu organizirale vrsto dogodkov, s katerimi bomo proslavili stoletnico rojstva sodobne kvantne teorije. Prvi dogodek je bila slovesna otvoritev IYQ2025 4. in 5. februarja 2025 na glavnem sedežu Organizacije Združenih narodov za izobraževanje, znanost in kulturo (UNESCO) v Parizu. Namen IYQ2025 je izboljšati razumevanje kvantne znanosti v širši javnosti, okrepiti mednarodno sodelovanje, promovirati uravnotežen razvoj in podpreti izobraževalne dejavnosti.

Iniciativo za razglasitev IYQ2025 je dalo Ameriško društvo fizikov (angl. American physical society, APS), pobudo pa so podprla številna društva in akademije, med drugim tudi Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Predlog je bil obravnavan na 42. Splošni konferenci UNESCA avgusta 2023, na kateri so razglasitev resolucije priporočili Generalni skupščini ZN. Nadaljnja obravnava je bila uvrščena na 78. zasedanje Generalne skupščine in Resolucija A/RES/78/287 je bila sprejeta 7. junija 2024.

Kvantna znanost je eno izmed paradnih znanstvenoraziskovalnih področij v Sloveniji. Ambicije obstajajo tudi za prenos teh znanstvenih dognanj v praktične izdelke, ki bi omogočili velik napredek na številnih področjih, od računalništva in komunikacij, meroslovja, do skrbi za zdravje in energije. V okviru Mednarodnega leta kvantne znanosti in tehnologije bo tudi v Sloveniji organiziranih več dogodkov. Ker gre pri IYQ2025 za pristop "od spodaj navzgor", bodo dogodke (so)organizirale posamezne znanstvenoraziskovalne in visokošolske organizacije, pri koordinaciji in skupni promociji pa bo pomagalo tudi Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Med drugim bomo tudi letos izvedli aktivnost v dnevih okoli Svetovnega kvantnega dneva, 14. aprila, med drugim bomo znova organizirali zdaj že tradicionalno »kvantno delavnico« za dijakinje in dijake, na kateri bodo ti imeli možnost sestaviti in preizkusiti nekaj kvantnih naprav.

Več informacij o dogodkih v okviru IYQ2025 je na krovni spletni strani

<https://quantum2025.org/>, dogodki v Sloveniji pa bodo najavljeni tudi na spletni strani <https://qutes.si/home/>.

Rok Žitko



**INTERNATIONAL YEAR OF
Quantum Science
and Technology**

Poročili s srečanj združenja European Women in Mathematics

V zadnjem obdobju sta potekali dve srečanja združenja European Women in Mathematics, obe na daljavo. Iz predstavitev smo izvedli zanimiva dejstva o zastopanosti in promociji žensk v matematiki v teh državah.

Srečanja 12. junija 2024 se je v imenu Odbora za ženske pri DMFA Slovenije udeležila Ganna Kudryavtseva. Zahra Nazemian (Avstrija) iz Gradca je na kratko predstavila zgodbe dveh pionirskih avstrijskih matematičark: Marije von Linden (1869-1936) in Olge Taussky-Todd (1906-1995). Slednja je avtorica več kot 300 raziskovalnih objav in je bila mentorica prve ženske z doktoratom iz matematike v ZDA. Predstavila je spletno stran Avstrijske asociacije žensk v matematiki A2 WiM in aktivnosti te asociacije. Med drugim redno objavljajo pogovore z uspešnimi ženskami v matematiki, imajo redna srečanja, med katerimi so tudi poletna čajna srečanja ob jezerih. Več informacij je na spletni strani asociacije. Olena Atanasyuk (Češka) je predstavila nekaj najbolj uspešnih čeških matematičark in zanimiva dejstva o ženskah v matematiki na Češkem. Izpostavila je, da na Češkem še ni asociacije ali odbora žensk v matematiki, različne aktivnosti in dogodke pa v glavnem organizira Češko društvo matematikov. Irina Oros (Romunija) je povedala, da je leta 2021 bila ustanovljena Mreža žensk v matematiki Romunije, ki organizira redna srečanja na daljavo in v živo (celo skupne večerje dvakrat letno). Leta 2020 so ustvarili google skupino, ki sedaj našteva 55 udeleženk. Med temami, o katerih debatirajo, so denimo upokojitvena starost za ženske in prilagajanje kriterijev za akademsko napredovanje zaradi

porodniških dopustov ipd. Ustvarili so poster o ženskah v matematiki v Romuniji. Več informacij je na spletni strani Mreže. Marie-Françoise Roy je poročala o praznovanju Dneva žensk v matematiki (12. maj) po svetu. Med državami, ki so organizirali dogodke, je bila omenjena tudi Slovenija, kjer je bila organizirana Okrogla miza ob dnevu žensk v matematiki (na UL FMF, 15. maja 2024). Več informacij lahko bralec najde na spletni strani iniciative.

Srečanja 14. 1. 2025 se je kot slovenska predstavница udeležila Nastja Cepak. Tudi na tem srečanju so bile predstavljene navdihujoče novosti in pobude iz različnih držav za spodbujanje žensk v matematiki. Grčija je predstavila impresiven obseg dejavnosti in prispevkov. Podprli so izdajo knjige 808 uglednih žensk stare Grčije Evangelosa Spandagosa, v kateri so poudarjeni izjemni dosežki žensk v starogrški zgodovini. Poleg tega so podprli delo *Women Mathematicians on the Margins of History* Hasapisa Dimitrisa, ki osvetljuje manj znane prispevke žensk na področju matematike. V Grčiji so počastili tudi Susanno Papadopoulou, prvo redno profesorico matematike v sodobni Grčiji. Kot pionirka na svojem področju še vedno podpira dejavnosti EWM, se udeležuje konferenc in predava ter je še vedno vir navdiha za mnoge. Grški EWM dodatno spodbuja ozaveščenost s pripravo zanimivih podkastov, ki so objavljeni na YouTubu, in z organizacijo razstave *Women of Mathematics Throughout Europe: Galerijo portretov*. Slednja razstava je bila razširjena s portreti uglednih matematičark z območja Sredozemlja, ki jih portretirali na Bledu avtorici originalne razstave Sylvie Paycha in Noel Tovia Matoff. Razširjena razstava je bila prvič predstavljena na 8. evropskem matematičnem kongresu v Sloveniji leta 2021. Sledila je Slovaška s pregledom svojih dejavnosti in napredka. Na Matematičnem inštitutu Slovaške akademije znanosti je trenutno zaposlenih 17 žensk, na akademskih matematičnih položajih po vsej državi pa je okoli 200 žensk. Čeprav je slovaški Odbor za ženske relativno majhna skupina s približno desetimi aktivnimi članicami, ostaja zavezana vplivnim pobudam. Za 12. maj so v sodelovanju s koordinatorji EWM iz Finske in Romunije organizirali delavnico o ženskah, ki poučujejo matematiko, s čimer so dokazali svojo predanost spodbujanju mednarodnega sodelovanja.

Ganna Kudryavtseva

Poročilo Odbora za matematiko

Odbor za matematiko je v letu 2024 uredil in izdal Konferenčni zbornik Konference slovenskih matematikov. Predlagal je člane za Odbor za nominacije pri IMU in kandidate za predavatelje na prihajajočem Mednarodnem matematičnem kongresu, ki bo leta 2026 v Philadelphiji. Udeležili smo se tudi Sveta EMS, ki je potekal v Granadi.

Jasna Prezelj

Poročilo Odbora za fiziko

Glavni nalogi odbora sta članstvo in sodelovanje v mednarodnih združenjih ter promocija slovenske fizike. Trenutni predsednik odbora je Nejc Košnik, ki je predsedovanje od Roka Žitka prevzel septembra 2024. DMFA je kot predstavnik Slovenije član dveh mednarodnih združenj, in sicer Evropskega fizikalnega združenja (European Physical Society, EPS) ter Mednarodne unije za osnovno in uporabno fiziko (International Union of Pure and Applied Physics, IUPAP). Nejc Košnik se je v imenu društva na daljavo udeležil srečanja Sveta EPS v Berlinu v marcu 2024. Društvo je sodelovalo v procesu zbiranja podpore za razglasitev leta 2025 za Mednarodno leto kvantne znanosti in tehnologije (<https://quantum2025.org/>). Odločitev je bila sprejeta na generalni skupščini Združenih narodov 7. junija 2024. V letu 2025 bodo potekali številni dogodki, s katerimi se bo obeležilo stoletnico začetka razvoja sodobne teorije kvantne mehanike. Aktivnosti v okviru Mednarodnega kvantnega leta bo koordiniral Odbor za fiziko. Odbor je aprila znova soorganiziral enodnevno delavnico za dijakinje in dijake na temo kvantne fizike v okviru Svetovnega kvantnega dneva 14. 4. (World quantum day, WQD). Dogodek je obsegal kratko uvodno predavanje, sestavljanje optičnih poskusov in obisk laboratorijev na UL FMF in IJS.

Nejc Košnik

Poročilo Odbora za astronomijo

DMFA Slovenije je kolektivni član Mednarodne astronomske unije (IAU) in eno od pridruženih društev Evropske astronomske zveze (EAS), v kateri je članstvo osebno. Jure Japelj se je kot predstavnik odbora za astronomijo pri DMFA Slovenije udeležil dveh letnih sestankov evropskih astronomskih

društev, ki jih organizira Evropska astronomska zveza; prisotna je bila tudi Andreja Gomboc kot članica odbora Evropske astronomske zveze. Nekateri člani DMFA delujemo tudi kot državni koordinatorji za promocijo astronomije (NOC) in za izobraževanje v astronomiji (NAEC), oboje pod okriljem IAU. Sodelovali smo pri pripravah in izvedbi tekmovanja v znanju astronomije za Dominkova priznanja in pri pripravah na Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike (MOAA). Soorganizirali smo Messierov maraton. Olimpijska ekipa je sodelovala na 9. srednjeevropskem tekmovanju iz astronomije in astrofizike (prej Tekmovanje treh dežel). Po predlogu odbora za astronomijo je DMFA postal podporni član Centra za zaščito temnega in tihega neba pred sateliti, ki deluje pod okvirjem Mednarodne astronomske zveze. Cilj centra je vzpostaviti dialog med astronomsko skupnostjo in industrijo ter omiliti svetlobno (in radijsko) onesnaženje, ki ga predstavljajo konstelacije satelitov. Andrej Guštin, dolgoletni član DMFA Slovenije, je v okviru 32. Generalne skupščine IAU v Cape Townu postal častni član Mednarodne astronomske zveze. Guštin je učitelj in državni koordinator za izobraževanje na področju astronomije (NAEC) ter pobudnik in dolgoletni vodja tekmovanj iz astronomije v Sloveniji. Že desetletja je dejaven na področju popularizacije astronomije. V okviru projekta GoChile, skupnem projektu Univerze v Novi Gorici in astronomske revija Spika, smo nadaljevali z izobraževanjem študentov in dijakov. Študentka UNG je teleskop uporabila za izdelavo projekta INSPIRO, dijakinja pa za raziskovalno nalogo v okviru tekmovanja Mladi raziskovalci ZOTKS. V Ajdovščini smo organizirali tretjo poletno šolo astronomije GoChile, ki se je je udeležilo šestnajst dijakov in dijakinj. Astronomska skupina na Fakulteti za matematiko in fiziko (UL) je kupila osemdesetcentimetrski teleskop, ki bo leta 2025 začel obratovati na Golovcu. Še naprej smo aktivno promovirali astronomijo. Na AGO Golovec smo organizirali Dneve odprtih vrat in Večere na observatoriju. O astronomiji doma in po svetu smo pisali na družbenih omrežjih, na Portalu v vesolje, v časopisih in revijah. Pripravljamo podkaste in radijske oddaje. Med letom smo izvedli tudi številna poljudno-znanstvena predavanja.

Jure Japelj

Poročilo Odbora za ženske

Ganna Kudryavtseva (UL FMF) in Nastja Cepak (UP FAMNIT) sta postali koordinatorke za Slovenijo pri EWM za mandat 2024-26. Nadomestili sta Marjeto Kramar Fijavž in Jasno Prezelj, ki sta bili koordinatorke v obdobju 2022-24. Ganna Kudryavtseva je leta 2024 zastopala Slovenijo na dveh srečanjih EWM na daljavo – zimskem in poletnem, poročili s srečanj sta objavljeni na spletni strani Odbora za ženske. 8. marca 2024 smo imeli neformalno srečanje v manjši skupini in klepet na Oddelku za matematiko UL. Julija 2024 smo imele drugo srečanje matematičark (pet udeleženk), 12. decembra 2024 pa prvo prednovoletno srečanje, ki se ga je udeležilo 10 matematičark s štirih različnih fakultet Univerze v Ljubljani. 15. maja 2024 smo organizirali okroglo mizo obdnevu žensk v matematiki. Govorki sta bili Barbara Drinovec Drnovšek in Vesna Iršič z UL FMF, med povabljenimi udeleženkami pa sta bili tudi študentki 1. letnika matematike Katarina Grilj in Kaja Rajter, ki sta bili pred tem uspešni na dekliški matematični olimpijadi in vodji slovenske ekipe na EMGO leta 2024 v Gruziji. Dogodka se je udeležilo okoli 40 oseb. V okviru skupine za ženske v fiziki IUPAP Women in Physics je bil pripravljen predstavitveni poster za ženske v fiziki v Evropi (Europe Working Group Women in Physics) avtoric Gillian Butcher in Marjetke Conradi.

Ganna Kudryavtseva

DIAMANTNI SPONZOR DMFA SLOVENIJE



V DRUŽBI DOBRIH LJUDI

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 2025

Letnik 71, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Premice, ki aproksimirajo dane točke v ravnini (David Gajser in Van Dečko)	81–95
Računska metoda določanja astronomskega položaja opazovalca (Aleksander Grm)	96–111
Nove knjige	
Željko Oset: Pisma Georga Fabra Josipu Plemlju (Boštjan Kuzman) ..	112–113
Novice	
Vabilo na Občni zbor	114–115
Mednarodno leto kvantne znanosti in tehnologije (Rok Žitko)	116–117
Poročila	117–XI

CONTENTS

Articles	Pages
Lines of best fit (David Gajser in Van Dečko)	81–95
A direct method for determination of the celestial fix (Aleksander Grm)	96–111
New books	112–113
News	114–XI

Na naslovnici: Sliko je narisal Grok 2, umetna inteligenca, ki jo je razvil xAI, z navodilom *nariši računsko metodo določanja astronomskega položaja opazovalca*