

## Termoakustični stroj

Termoakustični stroj je naprava, ki pretvarja toploto v energijo zvočnega valovanja. Kot mnogo drugih toplotnih strojev lahko tudi termoakustični stroj deluje v obratni smeri – kot hladilnik, ki uporablja zvok za črpanje toplote iz hladnega v tople rezervoar. Prevajanje toplote je pri visokih frekvencah, pri katerih stroj deluje, majhno, zato stroj za delovanje ne potrebuje izolirane delovne prostornine. V nasprotju z drugimi stroji termoakustični stroj nima premičnih delov, razen same delovne snovi.

Izkoristek termoakustičnega stroja je običajno manjši od izkoristkov drugih strojev, ima pa pred drugimi stroji prednosti zaradi svoje enostavne zgradbe in nizkih stroškov vzdrževanja. Je potencialno uporaben kot vir obnovljive energije v sončnih elektrarnah in kot stroj, ki ga napaja odpadna toplota iz drugih procesov. Pri tej nalogi se bomo ukvarjali s pretvorbo toplote v energijo zvoka (akustično mehansko delo), in ne z načini uporabe termoakustičnega stroja.

### Del A: Zvok v zaprti cevi (3.7 točke)

Obravnavaj toplotno izolirano cev z dolžino  $L$  in presekom  $S$ . Os cevi je vzdolž  $x$  osi. Krajišči cevi sta pri  $x = 0$  in  $x = L$ . V cevi, ki je zaprta na obeh krajiščih, je idealni plin. V ravnovesju je temperatura plina  $T_0$ , tlak  $p_0$  in gostota  $\rho_0$ . Viskoznost zanemari in predpostavi, da so v pravokotni ravnini  $yz$  lastnosti plina homogene in da se plin giblje le vzdolž osi  $x$ .



Slika 1

- A.1** Ko je v cevi stoječe zvočno valovanje, delci plina nihajo s krožno frekvenco  $\omega$  v smeri osi  $x$  okoli svojih mirovnih leg. Amplituda nihanja posameznega delca je odvisna od njegove mirovne lege na  $x$  osi. Odmik delca od njegove mirovne lege v odvisnosti od časa in od mirovne lege delca  $x$  je 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(upoštevaj, da  $u$  opisuje odmik delca od mirovne lege)

kjer je  $a \ll L$  konstanta,  $k = 2\pi/\lambda$  je valovno število in  $\lambda$  je valovna dolžina. Kolikšna je največja mogoča valovna dolžina  $\lambda_{\max}$  v tem sistemu?

V nadaljevanju obravnavamo valovanje z  $\lambda = \lambda_{\max}$ .

Obravnavaj tanko plast plina, z mirovnimi legami med  $x$  in  $x + \Delta x$  ( $\Delta x \ll L$ ). Ko je v cevi valovanje, se plásti plina, ki niha, kot je zapisano pri vprašanju A.1, spreminjajo prostornina in drugi termodinamski parametri.

V nadaljevanju povsod privzemi, da so vse spremembe termodinamskih parametrov majhne v primerjavi z njihovimi ravnovesnimi vrednostmi.

- A.2** Prostornina plasti  $V(x, t)$  niha okoli ravnovesne vrednosti  $V_0 = S\Delta x$ . Zapišemo lahko 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Izrazi  $V_1(x)$  s parametri  $V_0, a, k$  in  $x$ .

- A.3** Privzemi, da se v cevi, v kateri je stoječe zvočno valovanje, spreminja tudi tlak, kot približno opiše izraz 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

Upoštevaj sile, ki delujejo na plast plina, in izračunaj amplitudo tlačnega nihanja v prvem redu  $p_1(x)$  v odvisnosti od lege plasti  $x$ , ravnovesne gostote  $\rho_0$ , amplitude odmika  $a$  in valovnih parametrov  $k$  in  $\omega$ .

Toplotno prevodnost plina lahko pri akustičnih frekvencah zanemarimo. Razpenjanje in stiskanje plinske plasti obravnavamo kot adiabatna procesa: velja  $pV^\gamma = \text{const}$ , kjer je  $\gamma$  adiabatna konstanta.

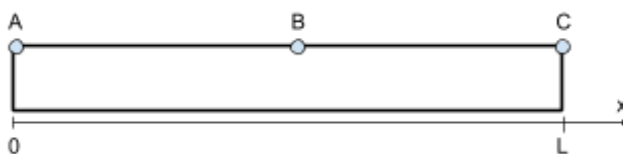
- A.4** Uporabi izraze in rezultate, zapisane prej, ter izpelji izraz za hitrost zvoka v cevi  $c = \omega/k$  v prvem redu. Hitrost zapiši s parametri  $p_0, \rho_0$  in konstanto  $\gamma$ . 0.3pt

- A.5** Zaradi adiabatnega razpenjanja in stiskanja plasti plina se spreminja tudi temperatura plasti, kot podaja izraz 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Amplitudo temperaturnega nihanja  $T_1(x)$  izrazi s parametri  $T_0, \gamma, a, k$  in  $x$ .

- A.6** Samo pri tem delu naloge privzemimo, da obstaja šibka toplotna interakcija med cevjo in plinom. Ta interakcija skoraj ne vpliva na stoječe zvočno valovanje v cevi; lahko pa plin izmenja malo toplote s cevjo. Segrevanje zaradi viskoznosti je zanemarljivo. 1.2pt  
Za vsako od točk na sliki 2 (A in C na krajiščih cevi ter B na sredini) zapiši, ali se temperatura cevi na teh mestih po dolgem času zviša, zniža ali ostane nespremenjena.



Slika 2

### Del B: Ojačitev zvoka s toplotnim stikom z okolico (6.3 točke)

V cev namestimo skladovnico vzporednih tankih trdnih plošč, ki so med seboj nekoliko razmaknjene.

## Theory

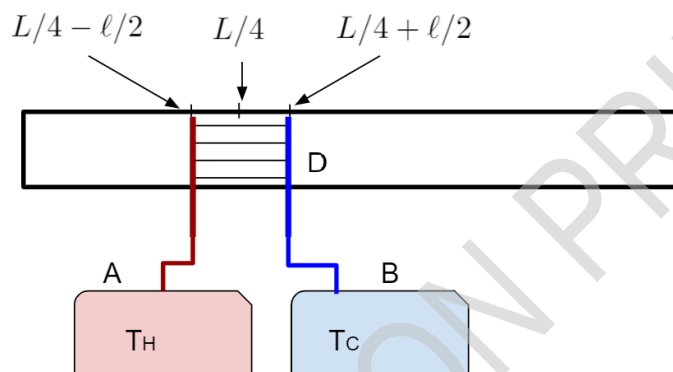


# Q3-3

slovenian only (Slovenia)

Plošče so vzporedne osi cevi, da ne ovirajo gibanja plina vzdolž cevi. Sredina skladovnice je pri  $x_0 = L/4$ , skladovnica zaseda dolžino cevi  $\ell \ll L$  vzdolž osi in tam zapolni celoten presek cevi. Levo in desno krajišče skladovnice ohranjamo pri stalni temperaturni razliki. Levo krajišče skladovnice pri  $x_H = x_0 - \ell/2$  je v stiku s toplotnim rezervarjem s temperaturo  $T_H = T_0 + \tau/2$ , desno krajišče pri  $x_C = x_0 + \ell/2$ , pa ima stalno temperaturo  $T_C = T_0 - \tau/2$ .

Skladovnica plošč omogoča šibek toplotni tok vzdolž cevi ob stalnem temperaturnem gradientu med krajišči skladovnice, velja  $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell} \tau$ .



Slika 3: Skica sistema; z A in B sta označena vroč in hladen toplotni rezervar, z D je označena skladovnica plošč.

Pri analizi vpliva, ki ga ima toplotni stik med plinom v cevi in skladovnico plošč, na zvok v cevi, predpostavi naslednje:

- Upoštevaj, da so, kot v prvem delu naloge, spremembe termodinamskih parametrov majhne v primerjavi z ravnovesnimi vrednostmi parametrov.
- V cevi je osnovno stoječe zvočno valovanje z največjo valovno dolžino. Skladovnica plošč le malo vpliva na zvočno valovanje v cevi.
- Dolžina skladovnice je mnogo manjša od valovne dolžine valovanja,  $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$ . Skladovnica je zato lahko postavljena v cev daleč od vozlov odmika in tlaka. Za odmike in tlak vzdolž skladovnice kar dobro velja  $u(x, t) \approx u(x_0, t)$  in  $p(x, t) \approx p(x_0, t)$  - odmiki in tlak so vzdolž skladovnice v vsakem trenutku povsod enaki.
- Zanimarimo lahko vplive robov, kjer se plasti plina gibljejo v in ven iz skladovnice.
- Razlika med temperaturama obeh krajišč skladovnice (torej med temperaturama obeh toplotnih rezervarjev) je majhna v primerjavi z absolutno temperaturo plina,  $\tau \ll T_0$ .
- Prevajanje toplote skozi skladovnico, plin in vzdolž cevi je zanemarljivo. Edini pomembni toplotni tokovi izvirajo iz konvekcije zaradi gibanja plina ter prevajanja toplote med plinom in skladovnico.

- B.1** Obravnavaj plast plina v območju skladovnice, ki ima prvotno mirovno lego pri  $x_0 = L/4$ . Ko se plast plina giblje znotraj skladovnice, se njena temperatura spreminja, kot določa izraz 0.4pt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Izrazi  $T_{\text{st}}$  s parametri  $a$ ,  $\tau$  in  $\ell$ .

- B.2** Kolikšna je kritična temperaturna razlika  $\tau_{\text{cr}}$ , nad katero plin prenaša toploto iz vročega do hladnega rezervoarja? Izrazi  $\tau_{\text{cr}}$  s parametri  $T_0$ ,  $\gamma$ ,  $k$  in  $\ell$ . 1.0pt

- B.3** Izpelji splošen (a približen) izraz za toplotni tok  $\frac{dQ}{dt}$  v tanko plast plina. Toplotni tok je linearna funkcija časovnih odvodov prostornine plasti  $\frac{dV}{dt}$  in tlaka  $\frac{dp}{dt}$  v plasti. V izrazu za toplotni tok uporabi še ravnovesne vrednosti tlaka in prostornine plasti plina  $p_0$ ,  $V_0$  in adiabatno konstanto  $\gamma$ . (Morda ti pride prav izraz za molsko toplotno kapaciteto plina pri stalni prostornini  $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ , kjer je  $R$  splošna plinska konstanta.) 0.8pt

Šibek toplotni tok med plastjo plina in skladovnico povzroči fazni zamik med nihanjem tlaka v plasti plina in prostornine plasti. Obravnavali bomo proces, pri katerem se zaradi te fazne razlike pojavi mehansko delo.

Naj bo toplotni tok od skladovnice v plast plina sorazmeren razliki med temperaturo plina v plasti in temperaturo najbližje tanke plošče iz skladovnice. Toplotni tok je približno podan z izrazom  $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$ .

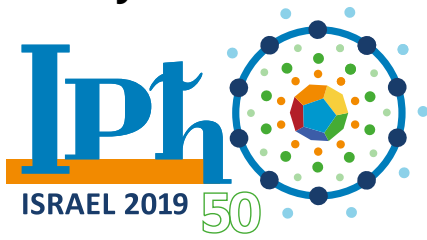
Temperaturi  $T_1$  in  $T_{\text{st}}$  sta, po vrsti, amplitudi temperaturnih nihanj plasti plina in najbližje tanke plošče iz vprašanj A.5 in B.1, parameter  $\beta > 0$  je konstanten. Predpostavi, da je pri frekvencah, pri katerih deluje termoakustični stroj, sprememba temperature plina v cevi zaradi tega toplotnega toka zanemarljiva v primerjavi z amplitudama  $T_1$  in  $T_{\text{st}}$ .

- B.4** Da lahko izračunamo mehansko delo, bomo upoštevali spremembo prostornine gibajoče se plasti plina, ki je posledica toplotnega stika plina s skladovnico. Zapišemo tlak plina v plasti in prostornino plasti, ko nanju vpliva skladovnica, v obliki 1.9pt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Iz danih amplitud  $p_a$  in  $p_b$  izrazi koeficienta  $V_a$  in  $V_b$ . V izrazih nastopajo še parametri  $p_a$ ,  $p_b$ ,  $p_0$ ,  $V_0$ ,  $\gamma$ ,  $\tau$ ,  $\tau_{\text{cr}}$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $a$  in  $\ell$ .

- B.5** Izpelji približen izraz za gostoto akustičnega mehanskega dela  $w$ , ki ga odda plast plina v enem ciklu. Integriraj gostoto dela po prostornini skladovnice, da dobiš skupno mehansko delo  $W_{\text{tot}}$ , ki ga plin odda v enem ciklu. Izrazi  $W_{\text{tot}}$  s parametri  $\gamma$ ,  $\tau$ ,  $\tau_{\text{cr}}$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $a$ ,  $k$  in  $S$ . 0.8pt



**B.6** Izpelji približen izraz za toploto  $Q_{\text{tot}}$ , ki je prešla ravnino  $x = x_0$  z leve strani na desno v enem ciklu. Toploto izrazi s parametri  $\tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, S, l$ . (Namig: konvekcijski toplotni tok lahko izračunaš z izrazom  $j = Q \frac{du}{dt}$ .) 0.8pt

**B.7** Poišči izkoristek termoakustičnega stroja  $\eta$ . Izkoristek vpeljemo kot razmerje med oddanim akustičnim mehanskim delom in toploto, prejeto iz vročega rezervoarja. Izkoristek izrazi s temperaturno razliko  $\tau$  med vročim in hladnim rezervoarjem, kritično temperaturno razliko  $\tau_{\text{cr}}$  in izkoristkom Carnotovega toplotnega stroja  $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ . 0.6pt

DELEGATION PRINT