

Število e^{-1} in verjetnost, da se nekaj ne zgodi

Boštjan Kuzman

Presekov seminar, 11. marec 2026

Denimo, da vržemo šest poštenih igralnih kock. Kakšna je verjetnost, da šestica ne pade niti enkrat?



Denimo, da vržemo šest poštenih igralnih kock. Kakšna je verjetnost, da šestica ne pade niti enkrat?



$$\left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 = (5/6)^6 \doteq 33\%$$

Kaj pa, če šest različnih pisem naključno vstavimo v 6 ovojnic z naslovi. Kakšna je verjetnost, da nobeno od njih ni v pravi ovojnici?



Kaj pa, če šest različnih pisem naključno vstavimo v 6 ovojnic z naslovi. Kakšna je verjetnost, da nobeno od njih ni v pravi ovojnici?



Približno 37%! Razlaga malce kasneje.

Kaj pa, če šest različnih pisem naključno vstavimo v 6 ovojnic z naslovi. Kakšna je verjetnost, da nobeno od njih ni v pravi ovojnici?



Približno 37%! Razlaga malce kasneje.

Obe vprašanji sta povezani s številom $e^{-1} \doteq 0.3679$. V tem predavanju bomo predstavili bomo še več primerov, ko se to število pojavi kot verjetnost, da se neki dogodek ne zgodi (ali pa, da se zgodi natanko enkrat).

Eulerjevo število

Kaj je že število e ?

Eulerjevo število

Kaj je že število e ?

- 2.7183...?

Eulerjevo število

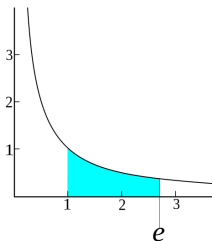
Kaj je že število e ?

- 2.7183...?
- Osnova naravnega logaritma?
- Realno število z lastnostjo $(e^x)' = e^x$?

Eulerjevo število

Kaj je že število e ?

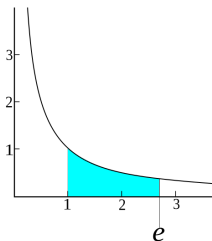
- 2.7183...?
- Osnova naravnega logaritma?
- Realno število z lastnostjo $(e^x)' = e^x$?
- Število z lastnostjo $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$?



Eulerjevo število

Kaj je že število e ?

- 2.7183...?
- Osnova naravnega logaritma?
- Realno število z lastnostjo $(e^x)' = e^x$?
- Število z lastnostjo $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$?



Jakob Bernoulli (1654–1705) je okoli leta 1685 pri študiju obresti prvi opazil, da je zaporedje s členi $(1 + \frac{1}{n})^n$ naraščajoče in navzgor omejeno.

- $(1 + \frac{1}{1})^1 = 2$
- $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2.25$
- $(1 + \frac{1}{3})^3 = 2.37$
- $\vdots$
- $(1 + \frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 3$ (v izpeljavi aproksimacije uporabimo binomski izrek in vsoto geometrijske vrste).

Število e definiramo kot limito tega zaporedja:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \doteq 2,7183.$$

Z nekaj znanja o limitah se lahko hitro prepričamo, da za obratno vrednost velja

$$e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \doteq 0,3679,$$

znano pa je tudi, da lahko števili e in e^{-1} predstavimo s pomočjo neskončnih vrst, na primer

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

Zapisa števila e^{-1} z limito zaporedja in z neskončno vrsto v sebi skrivata kombinatorično naravo tega števila, ki jo bomo vsaj delno pojasnili ob problemih iz verjetnosti v nadaljevanju.

Neuspešni kockar

V uvodu smo zastavili vprašanje o verjetnosti, da pri metu šestih poštenih kock šestica ne pade niti enkrat.



Slika: Verjetnost, da pri metu šestih kock ne dobimo nobene šestice, je enaka $(1 - \frac{1}{6})^6$.

V rezultatu prepoznamo šesti člen zaporedja $(1 - \frac{1}{n})^n$, ki narašča proti limiti e^{-1} .

Zapisano posplošimo na zaporedje enakih, med seboj neodvisnih poskusov, ki imajo le dva možna izida, ugodnega in neugodnega (Bernoullijev poskus)

Izrek

Če n -krat ponovimo poskus, pri katerem je verjetnost ugodnega izida $\frac{1}{n}$, potem je verjetnost, da se ugodni izid ne zgodi v nobeni ponovitvi, enaka $(1 - \frac{1}{n})^n$. Za velike n je ta verjetnost približno enaka e^{-1} .

Primer: 100 kroglic, natanko ena zlata. Če 100-krat izberemo naključno kroglico in jo vsakič sproti vrnemo v zaboj, je verjetnost, da nikoli nismo izvlekli zlate, približno 36,6%. Za natančnejši približek 36,75% pa bi potrebovali vsaj 486 kroglic in ponovitev.

Dodatno lahko opazimo še nekaj. Verjetnost, da se zgodi ugodni izid le v prvi izmed n ponovitev, je enaka

$$\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Ker so ponovitve med seboj enakovredne, je verjetnost, da se ugodni izid v n ponovitvah zgodi natanko enkrat, enaka

$$n \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

V limiti dobimo enak rezultat kot prej!

Izrek

Če n -krat ponovimo poskus, pri katerem je verjetnost ugodnega izida $\frac{1}{n}$, potem je verjetnost, da se ugodni izid zgodi natanko enkrat, enaka $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$. Za velike n je ta verjetnost približno enaka e^{-1} .

V prej zapisanih izrekih lahko prepoznamo posebna primera *Bernoullijevega* *obrazca*

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ta podaja verjetnost, da se v n ponovitvah Bernoullijevega poskusa natanko k -krat zgodi ugoden izid, katerega verjetnost je enaka p . V našem primeru je bil $p = 1/n$ in $k = 0$ ali $k = 1$.

Dobro premešani klobuki

Problem pisem iz uvoda je znamenit problem kombinatorike oziroma verjetnosti, ki sta ga okoli leta 1713 približno istočasno rešila že prej omenjeni Bernoulli in njegov sodobnik Pierre Rémonde De Montmort (1678 – 1719). Pogosto ga predstavimo tudi s klobuki, ki si jih med seboj naključno zamenja n gostov. V tem primeru nas zanima verjetnost, da nihče nima svojega klobuka. To različico problema bomo uporabljali v nadaljevanju.

Za majhne vrednosti n lahko to verjetnost določimo naivno z naštevanjem in preštevanjem ugodnih izidov. Za $n = 4$ bi dobili denimo naslednji razmislek. Vseh razvrstitev klobukov med 4 osebe v vrsti je $4!$ oziroma 24, glej Tabela 1. Ugodne so tiste, pri katerih noben klobuk ni na pravem mestu.



1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Tabela: Vseh razvrstitev štirih klobukov je $4! = 24$, ugodnih je 9.

Verjetnost je v tem primeru torej enaka $9/24 = 3/8 = 37,5\%$. Po isti metodi bi zmogli določiti tudi verjetnost za primer $n = 6$.

Uporabo načela vključitev in izključitev (primer $n = 3$).

Označimo z A_i dogodek, da ima i -ta oseba svoj klobuk, in z $\overline{A}_i$ njegov nasprotni dogodek. Potem je $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ dogodek, da ima vsaj ena oseba svoj klobuk, nas pa zanima verjetnost nasprotnega dogodka, torej

$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Po načelu vključitve in izključitve velja

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \\ &\quad - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) &= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= 1 - 3P(A_1) + 3P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Za splošen n dobimo podobno z nekaj več računanja izraz

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\&= 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) - \dots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\&= 1 - \binom{n}{1} \frac{(n-1)!}{n!} + \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} - \binom{n}{3} \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \\&= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!},\end{aligned}$$

ki predstavlja iskano verjetnost.

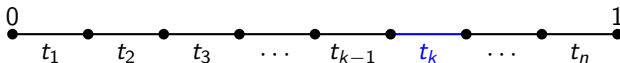
Izrek

Verjetnost, da pri naključni razvrstitvi n elementov nobeden ni na svojem mestu, je enaka $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Za velike n je ta verjetnost približno enaka e^{-1} .

Opomba: V tem primeru je konvergenca precej hitrejša kot pri prejšnji nalogi s kockarjem. Za približek 36,8% zadošča že $n \geq 6$. Dodajmo še eno opombo. Dogodki A_i v našem poskusu niso paroma neodvisni. Če je recimo prvi klobuk na pravem mestu, to seveda vpliva na verjetnost, da bo tudi drugi klobuk na pravem mestu. Medsebojni vpliv dogodkov pa se pri velikem n komaj pozna. Dejstvo, da je denimo klobuk številka 1 na pravem mestu, ne vpliva veliko na verjetnost, da je na pravem mestu klobuk številka 1000. Zato lahko za veliko število n predpostavimo, da so dogodki A_i oziroma $\overline{A_i}$ paroma neodvisni in se vsak zgodi z verjetnostjo $P(A_i) = 1/n$ oziroma $P(\overline{A_i}) = 1 - 1/n$. Tudi s takšno poenostavitvijo problema bomo za velike n dobili približno enak končni rezultat $(1 - \frac{1}{n})^n$, ki ga poznamo že iz prejšnje naloge. Ugotovili pa bomo, da je tudi verjetnost, da je na pravem mestu natanko en klobuk, približno enaka e^{-1} .

Dogodek, ki se ne zgodi

Recimo, da se neki dogodek ponavlja razmeroma redko in naključno, vendar s konstantno povprečno pogostostjo. Takemu zaporedju dogodkov rečemo tudi *Poissonov tok dogodkov*. Zanima nas **verjetnost, da se v dani enoti časa neki dogodek ne zgodi**, če se taki dogodki v povprečju zgodijo natanko enkrat v enoti časa.



Slika: Razdelitev časovne enote na intervale dolžine $1/n$.

Če so intervali tako kratki, da se lahko v posameznem intervalu dogodek zgodi največ enkrat, in izberimo enega od intervalov, t_k . Potem je verjetnost, da se v intervalu t_k zgodi opazovani dogodek, enaka $1/n$, verjetnost, da se dogodek ne zgodi, pa je enaka $1 - 1/n$. Od tod lahko sklepamo, da je verjetnost, da se dogodek ne zgodi v intervalu $(0, 1)$, enaka $(1 - 1/n)^n$

Zadnji izračun je ustrezen le ob predpostavki, da se v kratkem intervalu dogodek ne more zgoditi večkrat. Zato moramo poslati n proti neskončnosti in iskani rezultat postane e^{-1} . S tem smo dokazali naslednji izrek.

Izrek

Če se naključni dogodek v povprečju zgodi enkrat v enoti časa, potem je verjetnost, da se v neki izbrani enoti časa ne zgodi, enaka e^{-1} .

Določimo še verjetnost, da se opazovani dogodek v enoti časa zgodi natanko enkrat. To pomeni, da se zgodi v enem izmed n intervalov t_k , v ostalih $n - 1$ intervalih pa se ne zgodi. Ker imamo za izbiro ustreznega intervala n možnosti, bo torej verjetnost enaka $n \cdot \frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n})^{n-1}$, torej $(1 - \frac{1}{n})^{n-1}$, ko gre n proti neskončno.

Izrek

Če se naključni dogodek v povprečju zgodi enkrat v enoti časa, potem je verjetnost, da se v neki izbrani enoti časa zgodi natanko enkrat, enaka e^{-1} .

Opisana izreka predstavljata posebna primera izračuna vrednosti tako imenovane *Poissonove porazdelitve*. Pri tej porazdelitvi izraz

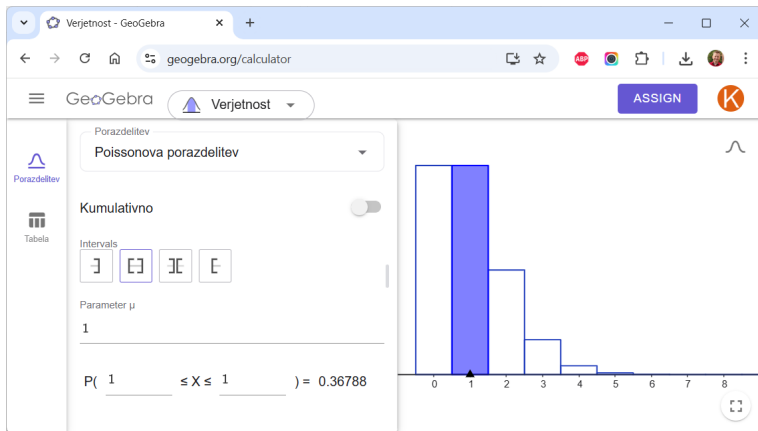
$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

opisuje verjetnost, da se v izbrani enoti časa k -krat zgodi neki dogodek, ki se v enoti časa v povprečju zgodi λ -krat. V našem primeru smo za $\lambda = 1$ izpeljali vrednosti

$$P(0) = \frac{e^{-1}}{0!} = e^{-1} \quad \text{in} \quad P(1) = \frac{1 \cdot e^{-1}}{1!} = e^{-1}.$$

Simeon Denis Poisson (1781–1840) je tovrstne izračune objavil leta 1837 ob proučevanju števila sodniških napak v danih časovnih obdobjih. Že pred njim pa je podobna odkritja v svojih delih o verjetnosti leta 1711 objavil Abraham De Moivre (1667–1754).

Omenimo še to, da lahko verjetnosti za Poissonovo porazdelitev enostavno določimo tudi s pomočjo programa GeoGebra, glej Sliko 3.



Slika: Diagram Poissonove porazdelitve s parametrom 1 v programu GeoGebra prikazuje verjetnosti, da se dogodek v enoti časa zgodi $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ -krat.

Na razmislek iz prejšnjega problema lahko pogledamo še nekoliko drugače. Denimo, da nas namesto števila opazovanih dogodkov v časovnem intervalu zanima čas od zadnje do naslednje ponovitve dogodka. Označimo zadnjo ponovitev dogodka s časom $t = 0$ in predpostavimo, da se v enoti časa dogodek zgodi povprečno enkrat.

Podobno kot prej lahko časovno enoto oziroma interval $(0, 1)$ razdelimo na n krajših intervalov t_k dolžine $1/n$. Kakšna je verjetnost, da se naslednja ponovitev dogodka zgodi v intervalu t_k ? To pomeni, da se ne zgodi v intervalih $t_1, \dots, t_{k-1}$ in se zgodi v intervalu t_k . Zato je iskana verjetnost enaka $(1 - \frac{1}{n})^{k-1} \cdot \frac{1}{n}$. Zdaj pa se vprašajmo po verjetnosti, da je za naslednjo ponovitev dogodka potrebno več kot 1 enoto časa. Potem je potrebno od 1 odšteti vsoto verjetnosti, da se ponovitev dogodka ne zgodi v intervalih $t_1, \dots, t_n$. Z upoštevanjem formule za vsoto geometrijskega zaporedja dobimo

$$1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Kot v prejšnjih dveh primerih je ta izračun smiseln le ob predpostavki, da so intervali dovolj kratki. Zato pošljemo n proti neskončnosti in dokazali smo še en izrek.

Izrek

Če se naključni dogodek v povprečju zgodi enkrat v enoti časa, potem je verjetnost, da bo med dvema zaporednima ponovitvama dogodka minila več kot ena enota časa, enaka e^{-1} .

Opisani izračun je poseben primer izračuna verjetnosti tako imenovane **eksponentne porazdelitve**. Pri tej porazdelitvi funkcija $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ opisuje verjetnost, da se dogodek naslednjič zgodi v časovnem intervalu $(0, t)$, če se v povprečju zgodi λ dogodkov v enoti časa. V našem primeru smo torej za $\lambda = 1$ določili verjetnost, da se dogodek ne zgodi v časovnem intervalu $(0, 1)$, dobljeni rezultat je enak $1 - P(1) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$.

Ogledali smo si precej primerov, ko je verjetnost, da se neki dogodek ne zgodi (ali pa se zgodi natanko enkrat), približno enaka e^{-1} . Opisani problemi so tudi fizikalno ali kako drugače smiselni ob veljavnosti predpostavke, da so dogodki v njih zares naključni in neodvisni. To pri problemih iz vsakdanjega življenja običajno ne velja povsem, pogosto pa zadošča za približno oceno. Razumevanje takih problemov je pomembno v raznovrstnih situacijah na različnih področjih, od fizike delcev do elektronskih komunikacij ali zavarovalništva.

Vaja 1

Izračunajte oziroma ocenite verjetnosti naslednjih dogodkov:

- 1 V treh metih kocke nikoli ne pade vsaj 5 pik.
- 2 V 32 metih petih kovancev natanko enkrat pade pet grbov hkrati.
- 3 Od 5 oseb, ki si naključno zamenjajo svoje klobuke, nihče ne dobi svojega.
- 4 Natanko ena oseba dobi svoj klobuk, če si 1000 oseb naključno zamenja klobuke.
- 5 V naslednji uri ne boste prejeli nobenega e-sporočila, če v povprečju prejmete 1 e-sporočilo na uro.
- 6 V naslednjem letu bo natanko 1 hujša poplava, če se v povprečju zgodi 1 hujša poplava na leto.
- 7 Do naslednjega telefonskega klica bo trajalo več 1 minuto, če čas med dvema klicema v povprečju traja 1 minuto.
- 8 V naslednji uri opazovanja boste videli natanko 1 utrinek, če v povprečju vidite 1 utrinek na uro.

Določite verjetnosti dogodkov z uporabo računalja za verjetnost v GeoGebri:

- 1 V naslednji minuti prejmemo več kot 4 e-sporočila, če v povprečju prejmemo 2 e-sporočila na minuto. (Namig: Poissonova porazdelitev, $\lambda = 2$.)
- 2 Delec razpade v manj kot 1 enoti časa, če v povprečju v 1 enoti časa razpadejo trije delci. (Namig: Eksponentna porazdelitev, $\lambda = 3$.)
- 3 V 100 ponovitvah poskusa z verjetnostjo uspeha 0.1 poskus uspe vsaj 10-krat. (Namig: Binomska porazdelitev, $n = 100$, $p = 0.1$.)

-  Vidav, I., Višja matematika I, DMFA - Založništvo, 2008.
-  Jamnik, R., Verjetnostni račun, DMFA SRS, 1987.
-  Vadnal, A., Elementarni uvod v verjetnostni račun, 2. izdaja, DZS, 1987.
-  Ross, S. M., First Course in Probability, 8th edition, Prentice and Hall, 2010.
-  Koo, R., Jones, M. Probability $1/e$. The College Mathematics Journal, 42 (1), 9–13, 2011.

Sliki kock in klobukov sta bili ustvarjeni z orodjem ChatGPT. Zgodovinske informacije o Bernoulliju, De Montmortu, Poissonu in De Moivreju smo našli na Wikipediji.