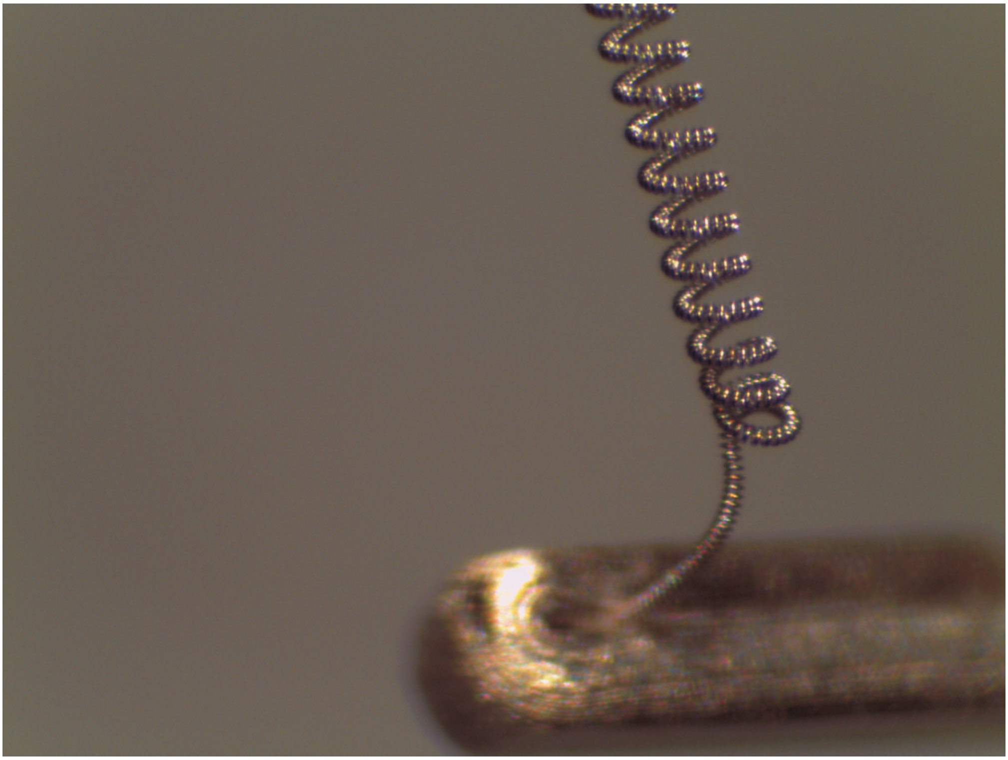
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2012
Letnik 59
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 59 • ŠT. 4 • STR. 121–160 • JULIJ 2012

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2012, letnik 59, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

NEKAJ NESTANDARDNIH METOD ZA RAČUNANJE DETERMINANT

EDVARD KRAMAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 15A15, 1501, 1503

V članku prikažemo nekaj enostavnih nestandardnih postopkov računanja determinant. Pri tem uporabljamo dvovrstne poddeterminante, izrezovanje stolpca in vrstice ali odštevanje števila od vseh elementov matrike.

SOME NONSTANDARD METHODS FOR EVALUATION OF DETERMINANTS

In this article we present some simple nonstandard algorithms for evaluation of determinants. We are using subdeterminants of order two, removing some row and column or subtracting some number from all elements of the matrix.

Uvod

Računanje determinante kvadratne matrike večjih redov je zamudno delo. Algoritmi računanja z računalnikom običajno uporabljajo razcep matrike na produkt spodnje in zgornje trikotne matrike (glej na primer [1]). Ta postopek je v tesni zvezi s tako imenovanimi elementarnimi operacijami na vrsticah in stolpcih matrike. Kadar računamo determinante „ročno“, torej brez uporabe računalnika, običajno prav z omenjenimi operacijami skušamo priti do čim bolj enostavne oblike. Namen prispevka je prikazati nekaj manj znanih metod računanja determinant, ki so lahko same po sebi zanimive.

1. Računanje determinante s pomočjo dvovrstnih poddeterminant

Vzemimo matriko A reda $n \times n$ in v njej izberimo poljuben neničelni element a_{ik}, ki ga na kratko označimo z α.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k-1} & \alpha & a_{i,k+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Na stolpcih s_j, kjer je $j \neq k$, naredimo naslednje elementarne operacije: $s_j \to \alpha \cdot s_j - a_{ij} \cdot s_k$. Tako dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11} - a_{1k}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{1,k-1} - a_{1k}a_{i,k-1} & a_{1k} & \alpha a_{1,k+1} - a_{1k}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{1n} - a_{1k}a_{in} \\ \alpha a_{21} - a_{2k}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{2,k-1} - a_{2k}a_{i,k-1} & a_{2k} & \alpha a_{2,k+1} - a_{2k}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{2n} - a_{2k}a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} - a_{nk}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{n,k-1} - a_{nk}a_{i,k-1} & a_{nk} & \alpha a_{n,k+1} - a_{nk}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{nn} - a_{nk}a_{in} \end{bmatrix}.$$

Determinanto te matrike razvijmo po i-ti vrstici. Pri tem faktor $(-1)^{i+k}$ upoštevamo tako, da pred tem v zgornji matriki pomnožimo zadnje $n-i$ vrstice in zadnje $n-k$ stolpce s številom -1. Rezultat moramo še deliti s faktorjem α^{n-1} in ugotovimo, da je determinanta naše matrike A enaka $\frac{1}{\alpha^{n-2}}$-kratniku determinante naslednje matrike

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11}-a_{1k}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{1,k-1}-a_{1k}a_{i,k-1} & a_{1k}a_{i,k+1}-\alpha a_{1,k+1} & \cdots & a_{1k}a_{in}-\alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i-1,1}-a_{i-1,k}a_{i1} & \cdots & \alpha a_{i-1,k-1}-a_{i-1,k}a_{i,k-1} & a_{i-1,k}a_{i,k+1}-\alpha a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,k}a_{in}-\alpha a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k}a_{i1}-\alpha a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k}a_{i,k-1}-\alpha a_{i+1,k-1} & \alpha a_{i+1,k+1}-a_{i+1,k}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{i+1,n}-a_{i+1,k}a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk}a_{i1}-\alpha a_{n1} & \cdots & a_{nk}a_{i,k-1}-\alpha a_{n,k-1} & \alpha a_{n,k+1}-a_{nk}a_{i,k+1} & \cdots & \alpha a_{nn}-a_{nk}a_{in} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

ki jo označimo z B. Hitro se lahko prepričamo, da elemente te matrike lahko pišemo kot dvovrstne determinante

$$B = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{i1} & \alpha \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,k-1} & a_{1k} \\ a_{i,k-1} & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \alpha & a_{i,k+1} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1n} \\ \alpha & a_{in} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{i-1,1} & a_{i-1,k} \\ a_{i1} & \alpha \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} \\ a_{i,k-1} & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} \\ \alpha & a_{i,k+1} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{i-1,k} & a_{i-1,n} \\ \alpha & a_{in} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{i1} & \alpha \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,k} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{i,k-1} & \alpha \\ a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & a_{i,k+1} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \alpha & a_{in} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{i1} & \alpha \\ a_{n1} & a_{nk} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{i,k-1} & \alpha \\ a_{n,k-1} & a_{nk} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & a_{i,k+1} \\ a_{nk} & a_{n,k+1} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \alpha & a_{in} \\ a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Med determinantama obeh matrik velja torej zveza

$$\det(A) = \frac{1}{\alpha^{n-2}} \det(B). \tag{3}$$

Metoda sestavljanja matrike B je enostavna. Najprej izberemo v matriki A neničelni element α, na primer v i-ti vrstici in k-tem stolpcu. Nato se postavimo na to mesto in sestavljamo dvovrstne determinante tako, da element α vsakokrat dopolnimo s tekočim elementom a_{rs} (kjer $r \neq i$ in $s \neq k$) matrike in dvema elementoma, ki sta na križišču ustrezne vrstice in stolpca z i-to vrstico in k-tim stolpcem. Pri tem ohranimo pozicijo elementov, kot so v prvotni matriki, in nam tudi ni treba misliti na predznake. Pri ročnem računanju je seveda pametno, da izberemo za α element 1 ali -1, če tak obstaja. Naj opomnimo, da v primeru izbire $\alpha = a_{11}$, če je to število neničelno, dobimo tako imenovano Chiòvo formulo (glej na primer [4]). Računanje determinante reda n smo prevedli na računanje determinante reda $n-1$. S ponavljanjem postopka pridemo nazadnje do ene same determinante reda 2. Naredimo zgled:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 6 & 2 & 7 \\ 3 & -4 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \\ \mathbf{1} & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Krepko smo označili števila, ki smo jih izbrali za naslednji korak. Oglejmo si še primer iz [6]

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_{n-1} & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & a_{n-1}b_n & a_nb_n \end{vmatrix},$$

kjer avtor predlaga, da najprej poiščemo zvezo med D_n in D_{n-1}. Vzemimo najprej, da je $a_1b_n \neq 0$. Če uporabimo zvezo (3) na desnem zgornjem vogalnem elementu, hitro ugotovimo, da dobimo determinanto, ki ima vse elemente nad glavno diagonalo enake 0, diagonalni elementi pa so po vrsti: $a_1b_n(a_2b_1-a_1b_2)$, $a_1b_n(a_3b_2-a_2b_3)$, $\ldots$, $a_1b_n(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)$. Tako dobimo po krajšanju z $(a_1b_n)^{n-2}$ za vrednost determinante rezultat:

$$D_n = a_1b_n \prod_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}b_k - a_kb_{k+1}).$$

Če je $a_1b_n = 0$, ta zveza trivialno velja.

Zvezo (3) lahko najprej posplošimo tako, da izberemo dva neničelna elementa neke vrstice. Če na primer izberemo elementa $\alpha = a_{ik} \neq 0$ in $\beta = a_{ir} \neq 0$, kjer je $1 \leq k < r < n$, podobno kot zgoraj z elementarnimi operacijami na stolpcih

$$s_j \to \alpha \cdot s_j - a_{ij} \cdot s_k, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \ j \neq k,$$
$$s_j \to \beta \cdot s_j - a_{ij} \cdot s_r, \quad j = r+1, \ldots, n$$

izpeljemo zvezo

$$\det(A) = \frac{1}{\alpha^{r-2}\beta^{n-r}} \det(B), \tag{4}$$

kjer je matrika B sestavljena iz poddeterminant drugega reda, tvorjenih tako kot zgoraj, pri čemer prvi parameter α uporabimo za prvih $r-1$ stolpcev, za naslednje stolpce pa uporabimo parameter β. Zgoraj smo vzeli $r \neq n$, v nasprotnem dobimo zvezo z enim samim parametrom.

Kot primer vzemimo matriko A reda 5×5, v kateri izberimo elementa $\alpha = a_{32}$ in $\beta = a_{34}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & \alpha & a_{33} & \beta & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

Za determinanto te matrike velja zveza

$$\det(A) = \frac{1}{\alpha^{4-2}\beta^{5-4}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ \alpha & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ \beta & a_{35} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & \alpha \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \alpha & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ \beta & a_{35} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{31} & \alpha \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \beta & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{31} & \alpha \\ a_{51} & a_{52} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & a_{33} \\ a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{52} & a_{54} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \beta & a_{35} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Zgornjo zvezo lahko posplošimo še na več izbranih elementov. Tako velja: če v i-ti vrstici matrike (1) izberemo neničelne elemente $a_{i,k_1}, a_{i,k_2}, \ldots, a_{i,k_r}$ (največ $n-2$), kjer je $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r < n$, potem velja naslednja zveza:

$$\det(A) = \frac{1}{a_{i,k_1}^{k_2-2} a_{i,k_2}^{k_3-k_2} \cdots a_{i,k_r}^{n-k_r}} \det(B), \tag{5}$$

kjer je matrika B iz dvovrstnih poddeterminant, tvorjenih na zgoraj opisani način. Pri tem preskočimo pri vsakem izbranem stolpcu na naslednji parameter. Zanimivo je, da v zvezah (4) in (5) pozicija prvega parametra nima vpliva na faktor pred novo determinanto. V posebnem lahko izberemo $n-2$

neničelnih elementov neke vrstice, na primer vse razen prvega in zadnjega. Če smo to naredili v i-ti vrstici, dobimo zvezo

$$\det(A) = \frac{1}{a_{i2}a_{i3}\cdots a_{i,n-1}}\det(B), \tag{6}$$

kjer je matrika B iz determinant reda 2, tvorjenih na zgornji način, pri čemer na vsakem koraku preskočimo na sosednji parameter. Podobne formule, kot so (4), (5) in (6), veljajo, če parametre izbiramo v nekem stolpcu. Za zgled s pomočjo zveze (6) izračunajmo naslednjo determinanto reda n:

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Najprej predpostavimo, da so vsa števila neničelna. Uporabimo zvezo (6) na prvi vrstici in v dobljeni determinanti iz vseh stolpcev izpostavimo potence števil a_1 in b_1 ter skupne faktorje v vrsticah. Po okrajšanju dobimo zvezo:

$$\begin{aligned} &D(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \\ &\quad = (a_1b_2 - a_2b_1)\cdots(a_1b_n - a_nb_1)\cdot D(a_2, a_3, \ldots, a_n; b_2, b_3, \ldots, b_n). \end{aligned} \tag{8}$$

Zveza velja tudi, če je kakšno od števil enako nič. Vzemimo npr., da je $a_1 = 0$. Razvijmo za ta primer determinanto (7) po prvi vrstici in dobimo:

$$\begin{aligned} &D(0, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \\ &\qquad = (-1)^{n+1}b_1^{n-1}a_2a_3\cdots a_nD(a_2, a_3, \ldots, a_n; b_2, b_3, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Isto pa dobimo, če v zvezi (8) postavimo $a_1 = 0$. Zvezo (8) rekurzivno uporabimo na vse manjših determinantah, dokler ne pridemo do determinante drugega reda, ki je enaka $D(a_{n-1}, a_n; b_{n-1}, b_n) = a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}$. Tako pridemo do identitete

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_ib_j - a_jb_i). \tag{9}$$

Naj opomnimo, da lahko pridemo do zgornje zveze tudi z uporabo Vandermondove determinante (glej npr. [4]). Po drugi strani pa dobimo zvezo za Vandermondovo determinanto, če v (9) postavimo $b_i = 1$ za vse i.

Oglejmo si, kako lahko uporabimo npr. zvezo (3) za računanje determinante Hessenbergove matrike. Ta ima obliko

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vzemimo, da je $a_{11} \neq 0$. Hitro opazimo, da z uporabo formule (3) na tem elementu dobimo le v prvi vrstici determinante reda 2, vse druge vrstice pa so samo pomnožene s faktorjem a_{11}. Tega lahko izpostavimo iz teh vrstic, ga okrajšamo in dobimo:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{2,n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ 0 & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Če je $a_{11} = 0$ in je $a_{21} \neq 0$, začnemo s tem elementom in dobimo enak rezultat. Če pa sta oba omenjena elementa enaka nič, zgornja zveza trivialno velja. Vidimo, da moramo izračunati samo dvovrstne determinante iz prvih dveh vrstic, druge vrstice ostanejo nespremenjene in opustimo prvi stolpec. Tako postopno pridemo do ene same determinante drugega reda. Izračunajmo primer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 6 \\ 0 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 7.$$

Zveze (3), (4), (5), (6) in (10) so bile predstavljene v [5].

2. Dodgsonova kondenzacijska metoda

Najprej si bomo ogledali neko zvezo med determinanto dane matrike in petimi njenimi poddeterminantami. Vzemimo matriko (1) z elementi (a_{ij})

in uvedimo krajšo oznako

$$(a_{ij}, a_{rs}) = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix}, \quad i < r,\ j < s.$$

Elemente te determinante dobimo tako, da skozi elementa a_{ij} in a_{rs} v matriki potegnemo vodoravni ter navpični vzporednici, in presečišča teh premic nam določajo elemente v determinanti. Podobno z (a_{ij}, a_{km}, a_{rs}), kjer je $i < k < r$ in $j < m < s$, označimo poddeterminanto reda 3, ki ima v oklepaju navedene elemente po vrsti na glavni diagonali, preostala mesta pa dopolnimo z elementi iz matrike, kot nam narekujejo indeksi na zgoraj opisani način. Podobno označevanje lahko uporabimo za poddeterminante višjih redov. Zaradi enostavnosti vzemimo, da je matrika A reda 4×4 z elementi (a_{ij}) in predpostavimo, da je $a_{22} \neq 0$ in $(a_{22}, a_{33}) \neq 0$. Pri računanju determinante matrike A upoštevajmo zvezo (3) z elementom a_{22} in nato še enkrat to zvezo na dobljenem srednjem elementu (a_{22}, a_{33}):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{22}^2} \begin{vmatrix} (a_{11}, a_{22}) & (a_{12}, a_{23}) & (a_{12}, a_{24}) \\ (a_{21}, a_{32}) & (a_{22}, a_{33}) & (a_{22}, a_{34}) \\ (a_{21}, a_{42}) & (a_{22}, a_{43}) & (a_{22}, a_{44}) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{22}^2 (a_{22}, a_{33})} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} (a_{11}, a_{22}) & (a_{12}, a_{23}) \\ (a_{21}, a_{32}) & (a_{22}, a_{33}) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (a_{12}, a_{23}) & (a_{12}, a_{24}) \\ (a_{22}, a_{33}) & (a_{22}, a_{34}) \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} (a_{21}, a_{32}) & (a_{22}, a_{33}) \\ (a_{21}, a_{42}) & (a_{22}, a_{43}) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (a_{22}, a_{33}) & (a_{22}, a_{34}) \\ (a_{22}, a_{43}) & (a_{22}, a_{44}) \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Namesto števila a_{22}^2 v imenovalcu ulomka lahko pišemo pred vsako notranjo determinanto število $\frac{1}{a_{22}}$. Potem pa prek zveze (3) spoznamo, da so na štirih mestih notranje determinante v resnici vrednosti štirih trivrstnih determinant. Tako pridemo do zveze

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_{22}, a_{33})} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Ali na krajši način:

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{22}, a_{33})} \begin{vmatrix} (a_{11}, a_{22}, a_{33}) & (a_{12}, a_{23}, a_{34}) \\ (a_{21}, a_{32}, a_{43}) & (a_{22}, a_{33}, a_{44}) \end{vmatrix}.$$

Podobno lahko z indukcijo, kjer primerno uporabimo zvezo (3), ugotovimo, da za determinanto matrike A reda $n \times n$ velja

$$\det(A) = \frac{1}{(a_{22}, \ldots, a_{n-1,n-1})} \begin{vmatrix} (a_{11}, \ldots, a_{n-1,n-1}) & (a_{12}, \ldots, a_{n-1,n}) \\ (a_{21}, \ldots, a_{n,n-1}) & (a_{22}, \ldots, a_{nn}) \end{vmatrix} \tag{12}$$

ob predpostavki, da je determinanta v imenovalcu od nič različna. Elementi v dvovrstni determinanti na desni so tvorjeni tako, da po vrsti zapišemo štiri vogalne determinante reda $n-1$, ki jih dobimo iz dane matrike. Ta zveza se imenuje tudi Desnanot-Jacobijeva identiteta. Na njeni podlagi sloni Dodgsonova metoda kondenzacije, ki jo je predlagal C. L. Dodgson ([3]), bolj znan pod psevdonimom Lewis Carroll in delu Alica v čudežni deželi. Dogovorimo se še za dve poimenovanji. *Sosedski minor* (krajše *s-minor*) *reda* r imenujmo determinanto podmatrike, ki jo dobimo tako, da izberemo r sosednjih vrstic neke matrike, druge izpustimo, ter r sosednjih stolpcev in druge izpustimo. Torej se morajo deli izbranih vrstic in stolpcev držati skupaj. *Središčno* ali *centralno podmatriko* (krajše *c-podmatriko*) pa imenujmo podmatriko, ki jo dobimo iz neke matrike, če odstranimo prvo in zadnjo vrstico ter prvi in zadnji stolpec. V zvezi (11) nastopajo na desni štirje s-minorji reda 3, v imenovalcu pa imamo determinanto c-podmatrike začetne matrike.

Vzemimo sedaj dano matriko A reda $n \times n$ in definirajmo zaporedje matrik A_k in B_k, za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ po naslednjem pravilu. Najprej postavimo $A_0 = A$, medtem ko naj bo B_0 matrika reda $(n-1) \times (n-1)$ iz samih enojk. Potem pa za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ elemente matrike A_k dobimo tako, da po vrsti računamo s-minorje reda 2 matrike A_{k-1} in jih delimo z istoležnimi elementi matrike B_{k-1}, za matriko B_k pa vzamemo c-podmatriko matrike A_{k-1}. Seveda moramo privzeti, da so vseskozi vsi elementi matrik B_k različni od nič. Matrika A_{n-1} je reda 1×1 in je ravno vrednost determinante začetne matrike A, matrika B_{n-1} pa je prazna, saj naj bi bila c-podmatrika prejšnje matrike reda 2×2. Oglejmo si ta postopek na primeru:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 4 & 2 & -10 \\ 5 & 2 & -12 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -10 & 18 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \qquad B_4 = \begin{bmatrix} \, \end{bmatrix}.$$

Torej $\det(A) = 2$. Na tem primeru pojasnimo, zakaj res dobimo na koncu vrednost determinante začetne matrike. Primerjajmo način računanja elementov matrik A_k z zvezo (12), seveda glede na velikost ustreznih podmatrik. V matriki A_1 so ravno s-minorji matrike A reda 2, v matriki B_1 pa minorji reda 1 notranjega dela matrike A. Opazimo, da so v matriki A_2 izračunani s-minorji reda 3 matrike A, v matriki B_2 pa s-minorji reda 2 notranjega dela matrike A, ki potem pridejo v poštev pri računanju s-minorjev reda 4 matrike A, ti so potem zbrani v matriki A_3. Element v B_3 je ravno determinanta c-podmatrike reda 3×3 začetne matrike. Nazadnje je v matriki A_4 izračunani s-minor reda 5 matrike A. Ker je ta en sam, je seveda to vrednost iskane determinante. Pomanjkljivost te metode je, da odpove, kakor hitro je kakšen element v matrikah B_k enak nič. Ko naletimo na ničelni element v eni od teh matrik, moramo postopek prekiniti. Lahko gremo sicer nazaj na začetno matriko in ji zamenjamo dve ali več vrstic oziroma stolpcev ter znova začnemo postopek, mislimo pa si lahko, kako je tako ponavljanje mučno delo. Hitro pa se da najti primere matrik, pri katerih nobena zamenjava začetnih vrstic ali stolpcev ne pomaga.

3. Računanje determinante z izrezovanjem stolpcev in vrstic

Vzemimo zopet matriko (1) z izbranim neničelnim elementom $\alpha = a_{ik}$. Tokrat pa razdelimo matriko na bloke tako, da posebno izdvojimo i-to vrstico in k-ti stolpec. Posameznim podmatrikam dajmo svoje oznake, tako lahko pišemo

$$A = \begin{bmatrix} W_{11} & v_1 & W_{12} \\ u_1^T & \alpha & u_2^T \\ W_{21} & v_2 & W_{22} \end{bmatrix}.$$

Sedaj naredimo enako kot v prvem razdelku in matriko B v (2) pišimo v obliki razlike

$$B = \begin{bmatrix} \alpha W_{11} & -\alpha W_{12} \\ -\alpha W_{21} & \alpha W_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T & -u_2^T \end{bmatrix}.$$

Dodajmo k drugemu členu faktor $\frac{\alpha}{\alpha}$. Upoštevajmo zvezo (3) med determinantama matrik A in B in pri računanju determinante matrike B upoštevajmo faktor α^{n-1}. Tako dobimo

$$\det(A) = \alpha \cdot \det\left(\begin{bmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^T & -u_2^T \end{bmatrix}\right). \tag{13}$$

Pogosto je ugodno izbrati kar spodnji desni element, če je različen od nič; in dobimo zvezo

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} W & v \\ u^T & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det\left(W - \frac{1}{\alpha}(vu^T)\right). \tag{14}$$

Tako lahko zaporedoma izražamo determinante z determinantami nižjih redov. Pri ročnem računanju se splača izbirati števila 1 ali -1, če obstajajo, ali vsaj ne prevelikih števil ter take, da je v izbrani vrstici ali stolpcu čim več ničel. Omenjeno metodo najdemo v [2]. Prikažimo postopek na zgledu, pri tem s črtami označimo mesta razrezov:

$$\det\left[\begin{array}{cc|c|cc} 5 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] =$$

$$= 2\det\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -7 \\ -7 & -2 & 3 & 4 \\ -5 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2\det\left(\frac{1}{2}\left[\begin{array}{rrr|r} 10 & 6 & -8 & -4 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -2 \\ \hline -13 & -4 & 6 & 5 \\ -8 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$$= \frac{2(-2)}{2^4}\det\left(\begin{bmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 13 & 4 & -6 \\ 8 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2^2}\det\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & -8 \\ 8 & 4 & -6 \\ \hline 8 & 2 & -4 \end{array}\right] = \frac{4}{2^2}\det\left(\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -8 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} -10 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = -2.$$

Pri tem bi lahko tudi zadnjo determinanto računali po istem pravilu, npr. $1 \cdot ((-10) - (2)(-4)/1) = -2$. Zgoraj je seveda šlo le za ilustracijo metode, med potjo bi lahko še marsikaj poenostavili ali primerneje izbirali elemente.

Zanimiva je zveza, ki jo dobimo iz (13) tedaj, ko so na primer nad elementom α v stolpcu in desno od njega v vrstici same ničle. Po kratkem računu dobimo

$$\det \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{12} \\ u_1^T & \alpha & 0 \\ W_{21} & v_2 & W_{22} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} + v_2 u_1^T/\alpha & W_{22} \end{bmatrix}$$

in podobne zveze, če se ničle glede na parameter α nahajajo levo in zgoraj, levo in spodaj oziroma desno in spodaj. V posebnem, če je element α edini od nič različen element v neki vrstici ali stolpcu dane matrike A, dobimo

$$\det(A) = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} W_{11} & -W_{12} \\ -W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}.$$

4. Računanje determinante z odštevanjem istega števila od vseh elementov

Na koncu omenimo še en preprost postopek računanja determinante, ki je uspešen takrat, ko ima matrika veliko enakih elementov. Označimo s C matriko, ki jo dobimo iz dane matrike A tako, da od vseh elementov odštejemo isto število α, torej $c_{ij} = a_{ij} - \alpha$, $i, j = 1, \ldots, n$. Determinanta naše matrike ima potem obliko

$$\det(A) = \begin{vmatrix} c_{11}+\alpha & c_{12}+\alpha & \cdots & c_{1n}+\alpha \\ c_{21}+\alpha & c_{22}+\alpha & \cdots & c_{2n}+\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}+\alpha & c_{2n}+\alpha & \cdots & c_{nn}+\alpha \end{vmatrix}.$$

Upoštevajmo, da je determinanta multilinearna funkcija stolpcev, in izpustimo determinante z vrednostjo 0, ker imajo enaka dva ali več stolpcev. Preostane nam vsota $n+1$ determinant

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \alpha & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} c_{11} & \alpha & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \alpha & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \alpha & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \alpha \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \alpha \end{vmatrix}.$$

Razvijmo zadnjih n determinant po stolpcih, v katerih nastopa zgolj parameter α, in izpostavimo skupni faktor, ta je torej pomnožen z vsoto vseh kofaktorjev K_{ij}^C determinante matrike C. Prišli smo do zveze

$$\det(A) = \det(C) + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}^C. \tag{15}$$

Vidimo, da bomo uspešni, če bo determinanto matrike C lahko izračunati in če bo kofaktorjev v determinanti matrike C čim manj oziroma bodo čim bolj sorodni. Zgornjo zvezo zasledimo v zbirki [6]. Za zgled izračunajmo determinanti naslednjih dveh matrik reda n:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b & \cdots & b & b \\ b & a_2 & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a_{n-1} & b \\ b & b & \cdots & b & a_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b & x \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ -x & b & \cdots & b & a \end{bmatrix},$$

kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a, b in x dana števila. Pri prvi matriki naj bo $n \geq 2$, pri drugi pa $n \geq 3$. Če od vseh elementov matrike A odštejemo število b, dobimo matriko, ki ima samo po diagonali po vrsti razlike $a_i - b$, $i = 1, 2, \ldots, n$, drugod pa imamo ničle. Determinanto dobljene matrike je lahko izračunati, kofaktorje pa ima od nič različne le k diagonalnim elementom. Iz zveze (15) sledi

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - b) + b \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (a_i - b).$$

Tudi pri matriki B odštejmo povsod število b, dobimo matriko, ki ima neničelne elemente samo na glavni diagonali ter na zgornjem desnem in spodnjem levem vogalnem mestu. Samo na teh mestih so tudi neničelni kofaktorji. Če za hip pišemo $z = a - b$, dobimo

$$\det(B) = z^n + (x-b)(x+b)z^{n-2} + \\ + b\big(2z^{n-1} + (n-2)z^{n-3}(z^2 - (b^2 - x^2)) - (x-b)z^{n-2} - (-x-b)z^{n-2}\big).$$

Zamenjamo nazaj z z $a - b$, izraz še uredimo in dobimo:

$$\det(B) = (a-b)^{n-3}\big((a + (n-3)b)(a^2 + x^2) - 2(n-2)ab^2\big).$$

Sklep

Namen prispevka ni bil obravnavati računanje determinante iz zornega kota numerične analize. S te strani je gotovo med najboljšimi metoda, ki temelji na razcepu matrike na produkt spodnje in zgornje trikotne matrike. Prikazali smo nekaj drugih manj znanih postopkov, ki pa za numerično računanje determinante splošne matrike vsi gotovo niso zanimivi. Morda vseeno za metode iz prvih treh razdelkov povejmo, da so po časovni zahtevnosti enake tradicionalni metodi, ki uporablja razcep matrike. Število potrebnih aritmetičnih operacij za izračun determinante reda n je pri vseh velikostnega reda n^3. Natančnejše štetje operacij pokaže, da postopka iz prvega in tretjega razdelka zahtevata približno enako operacij, sicer nekaj več od metode z razcepom matrike, še nekaj več operacij pa zahteva Dodgsonova metoda. Če metodo prvega razdelka za numerično rabo modificiramo tako, da vsakokrat izpostavimo parameter iz izbrane vrstice, preden računamo dvovrstne determinante, pa je število potrebnih operacij skoraj enako kot pri tradicionalni metodi brez pivotiranja. Računanje determinante Hessenbergove matrike je v splošnem smiselno le z metodama iz prvega in tretjega razdelka. Za obe je število potrebnih operacij velikostnega reda n^2, kar je enako kot pri metodi, opisani v [1]. Natančneje, omenjena metoda in metoda z izrezovanjem zahtevata celo enako aritmetičnih operacij, metoda iz prvega razdelka pa nekaj več.

LITERATURA

[1] Z. Bohte, *O računanju determinante*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979), 161–177.

[2] F. C. Chang in C. T. Su, *More on quick evaluation of determinants*, Appl. Math. Comput. **93** (1998), 97–99.

[3] C. L. Dodgson, *Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values*, Proc. R. Soc. London **15** (1866–1867), 150–155.

[4] H. Eves, *Elementary matrix theory*, Dover Publ., New York, 1966.

[5] E. Kramar, *On the evaluation of determinants using two order subdeterminants*, Austral. Math. Soc. Gaz. **36** (2009), 201–207.

[6] I. V. Proskurjakov, *Sbornik zadač po linejnoj algebre*, 4. izd., Nauka, Moskva, 1970.

UTRIPANJE ŽARNICE

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 44.40.+a, 02.60.Lj

Žarnica sveti zato, ker v njej električni tok drobno kovinsko žico segreje do zelo visoke temperature. Svetilnost žarnice, priključene na izmenično napetost, niha z dvojno frekvenco toka in zaostaja v fazi za trenutno električno močjo zaradi omejenega toplotnega toka in toplotne kapacitete žareče žice.

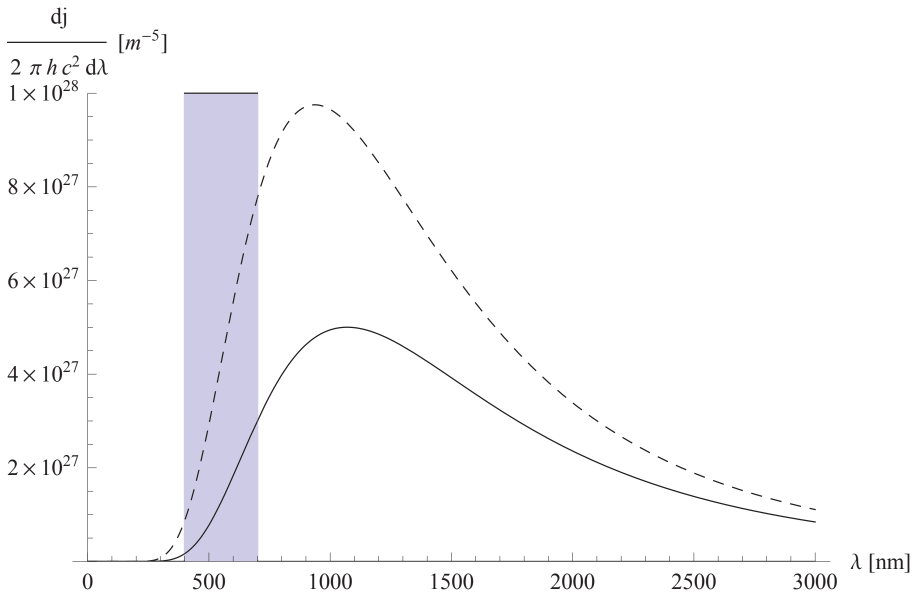
BEATING OF A LIGHT BULB

An incandescent bulb radiates light because electric current heats up its filament to a very high temperature. The luminosity of an incandescent lamp driven by AC oscillates at the double frequency of the current and is out of phase with the electric power supplied because of the finite heat capacity of the filament and the limited rate at which it radiates heat.

Žarnica je svetilo, ki sveti z razžarjeno žico, in je izpodrinila svetila, v katerih žarijo saje v plamenu gorečega fosilnega goriva. Dolgo je bila najpogostejši vir razsvetljave v našem domu. Zdaj jo izpodrivajo druga, bolj učinkovita svetila, kot so sveteče diode ali fluorescenčne sijalke. Vir svetlobe je kovinska žica, segreta do visoke temperature. Žica se segreje zaradi električnega toka, ki teče skoznjo, in je običajno narejena iz volframa, ki je primeren zato, ker ima visoko tališče pri 3695 K. V navadni žarnici se žica segreje do približno 2800 K, kaj dosti čez pa žarnici močno skrajša življenjsko dobo. Vendar žice ne obvaruje niti to, da je njena temperatura precej nižja od tališča. Sčasoma iz žice izpari dovolj volframa, da se žica pretrga in žarnica postane neuporabna. Ko se ta proces začne, potem teče vedno hitreje, saj je žica na tanjšem delu bolj vroča in volfram tam še hitreje izpareva. Če pride vroča žica v stik z zrakom, ki vsebuje dovolj kisika, takoj zagori (oksidira). Zato je žica nepredušno zaprta v stekleno bučo, v kateri je inerten plin, običajno dušik ali argon. Tipična žarnica je prikazana na sliki 1. Pri žarnici ločimo naslednje dele: stekleno bučo, žico, oporne žice ter kovinski navoj. Na sliki je z okvirjem označen del, ki je na naslovnici prikazan povečano. V povečavi (slika na naslovnici) opazimo, da je žica zvita v dvojno vijačnico. Tako je izkoristek žarnice nekoliko boljši in življenjska doba daljša, saj se del izsevane toplote in izparelega volframa lažje absorbira. Poleg navadnih žarnic uporabljamo tudi halogenske žarnice. Te žarnice so podobne navadnim, le da je v njih žica segreta do 3200 K ali več, odvisno od namena in

Slika 1. Žarnica z volframovo žico, opornimi in dovodnimi žicami, stekleno bučo ter kovinskim navojem. Na sliki označeni izsek je na naslovnici prikazan povečano. V povečavi opazimo dvojno vijačnico, v katero je navita žica.

stroškov, ki smo jih pripravljeni vložiti v proizvodnjo in nakup. Halogenka zadovoljivo deluje pri višji temperaturi zato, ker je v stekleni buči para halogenega elementa, običajno broma, ki se ob buči, kjer je temperatura nižja, kemijsko veže z izparelim volframom. Ob žici, kjer je temperatura višja, spojina razpade in volfram se naloži nazaj na žico. Tako se izparevanje volframa občutno zmanjša in življenjska doba žarnice podaljša. Halogenske žarnice so običajno manjše ali celo narejene iz notranje in zunanje buče, saj je tako obnova žarilne žice bolj učinkovita in je vroča notranja buča ločena od okolice zaradi požarne varnosti. Halogene svetilke so namreč precej bolj vroče od navadnih žarnic – temperatura buče lahko preseže 1000 °C, pri navadnih žarnicah pa je buča segreta na 200 do 400 °C.



Slika 2. Spekter sevanja segretega telesa. Polna krivulja ustreza telesu, segretemu na 2800 K (navadna žarnica), črtkana pa telesu, segretemu na 3200 K (halogenska žarnica). S sivo je označeno območje vidne svetlobe.

Poiščimo najprej temperaturo žice v žarnici, priključeni na enosmerno napetost U. Upor žarnice je $R = \frac{\zeta l}{\pi r^2}$, pri čemer je l dolžina, r pa polmer žice. ζ je specifični upor snovi, iz katere je žica. V toplotnem ravnovesju žarnica prejeto električno moč $P_e = \frac{U^2}{R}$ odda kot toplotni tok. Večino toplote žarnica odda s sevanjem. Spekter sevanja segretega telesa opiše Stefan-Planckov zakon:

$$\frac{dj}{d\lambda} = \epsilon \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \ .$$

Tu so: j gostota energijskega toka, λ valovna dolžina elektromagnetnega valovanja, ϵ izsevnost, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js Planckova konstanta, $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s svetlobna hitrost, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta in T absolutna temperatura sevajočega telesa. Izsevnost je to, kar odbojnosti ali albedu manjka do 1, pri volframu je približno enaka 0,4. Odvisna je od valovne dolžine, vendar bomo v računih to odvisnost zanemarili. Spektra navadne in halogenske žarnice sta prikazana na sliki 2.

Celotni izsevani energijski tok je:

$$P_s = 2\pi rl \int_0^\infty \frac{dj}{d\lambda} d\lambda = \epsilon 2\pi rl\sigma T^4.$$

Izraz poznamo tudi kot Stefanov zakon in $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/m^2 K^4 je Stefanova konstanta. Sevanje izhaja iz plašča valja, s katerim predstavimo žico. Plašč ima ploščino $2\pi rl$. Efektivno je sicer površina žice zaradi njenega navitja manjša, saj se del izsevane svetlobe ponovno absorbira. V ravnovesju velja:

$$\frac{U^2}{R} = \epsilon\sigma 2\pi rl(T^4 - T_z^4).$$

Zadnji člen vsebuje segrevanje žarnice zaradi sevanja iz okolice, ki ima temperaturo T_z. Ta člen bomo zanemarili, saj je vsaj tri velikostne rede manjši od sorodnega člena, v katerem nastopa temperatura žice. Ravnovesna temperatura žice je:

$$T = \sqrt[4]{\frac{rU^2}{2\zeta\epsilon\sigma l^2}}\ .$$

Ocenimo dimenzije žice v žarnici, ki je pri napetosti U segreta do želene temperature in sveti z močjo P. Delovna napetost in nazivna moč sta najbolj običajna podatka za žarnico. Iz pogoja za ravnovesje sledita polmer:

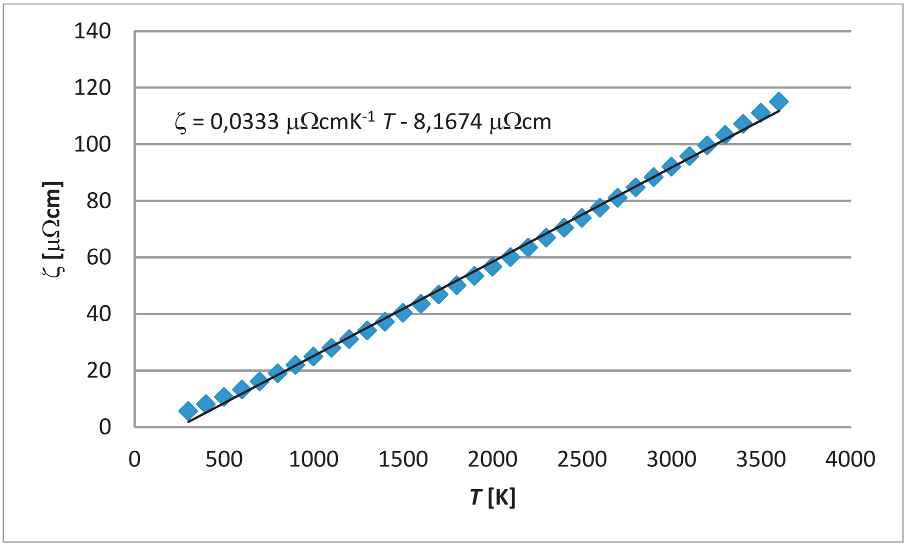
$$r = \sqrt[3]{\frac{P^2\zeta}{2\pi^2\epsilon\sigma U^2 T^4}}$$

ter dolžina

$$l = \frac{\pi r^2 U^2}{P\zeta} = \sqrt[3]{\frac{PU^2}{4\pi\zeta\epsilon^2\sigma^2 T^8}}.$$

Za 20-vatno žarnico z nazivno napetostjo 12 V tako izračunamo premer 88 μm in dolžino 5,2 cm, kar dobro ustreza pravim vrednostim. Žica v enaki halogenski žarnici ima premer 78 μm in dolžino 3,4 cm, v enako močni žarnici, namenjeni (efektivni) napetosti 220 V, pa je premer 13 μm in dolžina 36 cm. Upoštevali smo, da se specifični upor volframa spreminja s temperaturo, in smo vstavili specifični upor 85 $\mu\Omega$cm pri temperaturi 2800 K za žarnico in 100 $\mu\Omega$cm pri temperaturi 3200 K za halogensko žarnico. Temperaturna odvisnost specifičnega upora volframa je skoraj linearna in jo prikazuje graf na sliki 3.

Odgovorimo še na vprašanje, zakaj imamo poleg navadnih tudi halogenske žarnice, ki so manj trpežne in tehnološko zahtevnejše? Žarnice so bolj enostavne in cenejše za izdelavo, halogenke pa jih izpodrivajo zaradi boljšega izkoristka. Izkoristek žarnice je razmerje med izsevano energijo vidne svetlobe in vloženo električno energijo. Na sliki 2 vidimo, da žarnica večino energije izseva v infrardečem delu spektra, to je pri valovnih dolžinah nad



Slika 3. Specifični upor volframa kot funkcija temperature.

700 nm. Delež energije vidne svetlobe dobimo z integralom

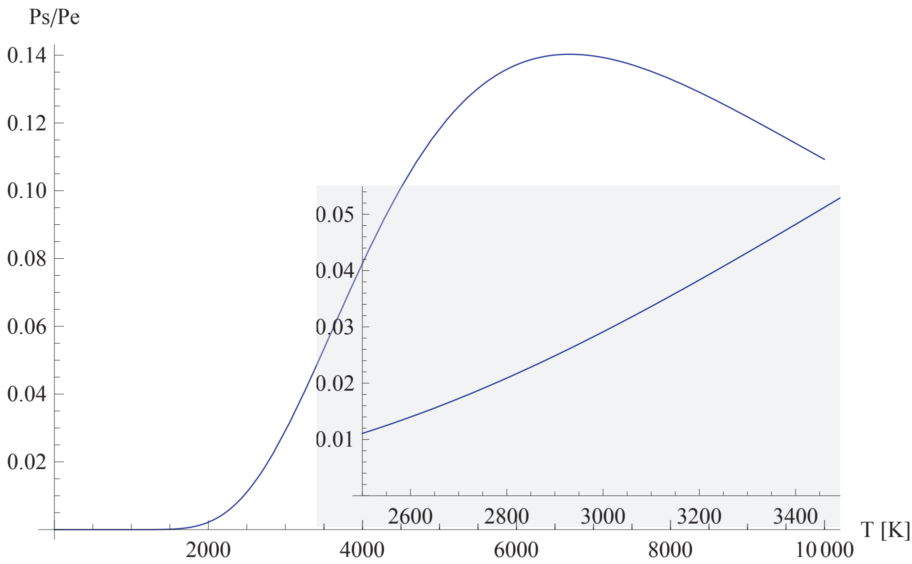
$$\frac{j_{vidna}}{j} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dj}{d\lambda} f(\lambda) d\lambda}{\epsilon \sigma T^4}.$$

Integriramo v mejah vidnega spektra, to je od 400 do 700 nm. Pri izračunu izkoristka upoštevamo še občutljivost očesa, ki ni enaka pri vseh valovnih dolžinah. Dobro jo opiše Gaussova funkcija z vrhom pri $\lambda_0 = 555$ nm in širino $\delta = 60$ nm: $f(\lambda) = e^{-(\lambda-\lambda_0)^2/\delta^2}$. Integral numerično rešimo brez težav in slika 4 kaže izkoristek kot funkcijo temperature. Na grafu vidimo, kako dobro so naše oči usklajene s primarnim virom zemeljske svetlobe – Soncem.[1]

Tudi doma bi radi imeli svetilko, ki bi čim bolj posnemala Sonce in bi imela obenem tudi najboljši izkoristek. Izkoristek je najvišji pri zelo visoki temperaturi (višji od temperature Sončevega površja 6000 K), žal pa nimamo na voljo snovi, ki bi pri tej temperaturi še ostala trdna. Najvišje tališče[2] med elementi ima ogljik, ki pri normalnem tlaku sublimira pri temperaturi 4000 K. Ogljik prevaja električni tok, če je v alotropski obliki grafita, ki so ga uporabljali v prvih žarnicah, vendar pa ima slabe mehanske

[1]Nekaj o tem si lahko preberete tudi v [1], str. 271–272.

[2]Tališče je temperatura, pri kateri snov preide iz trdne v kapljevinasto fazo. Pri grafitu bi morali govoriti o temperaturi sublimacije.



Slika 4. Izkoristek termičnega sevanja telesa kot funkcija temperature. Največji izkoristek za človeško oko je pri temperaturi nad 6000 K. Izkoristek pri nižjih temperaturah je precej nižji in je prikazan na povečanem izseku.

lastnosti. Zato je za uporabo v žarnici bolj primeren volfram, ki je element z drugim najvišjim tališčem pri 3695 K. Spojina z najvišjim[3] tališčem je tantal-hafnijev karbid Ta_4HfC_5. Kakorkoli, pravilo, ki sledi iz grafa, je: višja temperatura žice pomeni boljši izkoristek žarnice. Izkoristek navadne žarnice je 2 %, halogenske pa 4 %. S halogenko torej dobimo enak vidni učinek pri pol manjši električni moči. Če želimo enostavno, trpežno svetilo, bo navadna žarnica v redu, dokler jo zakon ne prepove. Za primerjavo povejmo, da doseže zeleni laser z valovno dolžino 555 nm izkoristek 100 %, natrijeve plinske svetilke do 30 %, sveteče diode do 22 %, fluorescentne sijalke pa do 16 %. Spektri svetlobe teh svetil ne ustrezajo spektru sevanja segretega črnega telesa in ne vzbudijo v očesu vtisa bele svetlobe, temveč obarvane. Ta vtis pogosto opišemo s temperaturo, ki bi jo imelo segreto telo enake barve. Tako modrikasto barvo fluorescentnih sijalk opiše višja temperatura, in sicer 5500 K, kot rumenkasto barvo navadnih žarnic, ki žarijo pri temperaturi 2800 K, čeprav so fluorescentne sijalke na dotik hladnejše.

V gospodinjstvih so žarnice običajno priključene na izmenično omrežno napetost. Seveda ne vse, nekatere so na omrežje priključene prek adapterja, ki usmeri in zniža napetost. Temperatura žarnice, priključene na izmenično

[3] avtorju znanim

napetost, niha in s tem niha tudi njena svetlost. Amplituda nihanja svetlosti je tako majhna in frekvenca dovolj velika, da preslepi človeško oko, ki svetlobo dojema kot nespremenljivo. Električni tok v hišni napeljavi niha s frekvenco $\nu = 50$ Hz, kar pomeni nihajni čas 20 ms. Če zanemarimo kapaciteto in induktivnost žarnice, je električna moč žarnice $P_e = \frac{U_0^2}{R}\cos^2\omega t$. U_0 je amplituda napetosti (v Evropi je to 325 V) in $\omega = 2\pi\nu$. Energijski zakon za žico pove, kako se v kratkem časovnem intervalu dt spremeni temperatura žarnice dT:

$$mcdT = \frac{U_0^2}{R}\cos^2\omega t dt - \epsilon\sigma S_2 T^4 dt.$$

Pri tem je m masa žice, c pa njena specifična toplota. Zanemarili smo segrevanje iz okolice in privzeli, da je temperatura po preseku žice povsod enaka, prav tako ne bomo upoštevali spreminjanja upora s temperaturo. Rešitev te enačbe je obravnavana v [1]. Nas bo zanimala samo kvazistacionarna rešitev, ko prehodni pojavi pri vklopu žarnice izginejo in privzamemo, da temperatura niha harmonično z enako frekvenco kot električna moč, in sicer okoli povprečne temperature

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{rU_0^2}{4\zeta\epsilon\sigma l^2}}.$$

Z brezdimenzijskima časom $\tau = \omega t$ in temperaturo $\theta = \frac{T}{T_0}$ lahko preuredimo enačbo v

$$\dot\theta = a(1 + \cos 2\tau) - a\theta^4.$$

Pika pomeni odvod po času τ. Vpeljali smo konstanto $a = \frac{1}{2\omega mc}\sqrt[4]{\frac{2U_0^6\epsilon\sigma S_2}{R^3}}$. Rešitev diferencialne enačbe poiščemo z nastavkom $\theta = 1 + \theta_0\sin(2\tau + \delta)$, s katerim v prvem približku izrazimo $\theta^4 \doteq 1 + 4\theta_0\sin(2\tau + \delta)$, saj pričakujemo, da je θ_0 majhen. Enostavno pokažemo (kot bi rekel Kuščer), da θ niha z amplitudo

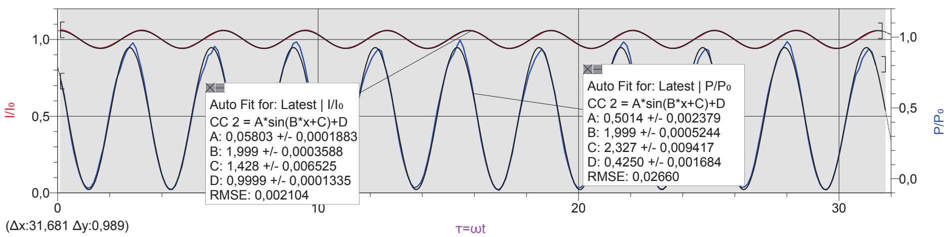
$$\theta_0 = \frac{a}{2\sqrt{1 + 4a^2}}$$

in zaostaja v fazi za električno močjo

$$\tan\delta = 2a.$$

Kvocient amplitude nihanja svetilnosti in povprečne svetilnosti je v prvem približku enak $4\theta_0$. Od tu lahko določimo $a = \frac{2\theta_0}{\sqrt{1-16\theta_0^2}}$, v katerem se skrivata toplotna kapaciteta ter efektivna površina žice. To je pričakovano in bi uganili tudi na pamet. Toplotne prevodnosti, ki bi jo pričakovali pri razsežnejših telesih, v izrazu ni, ker smo naredili približek, da je temperatura žice po vsem preseku enaka.

Poskus, s katerim izmerimo nihanje svetilnosti žarnice, naredimo tako, da žarnico priključimo na izmenično napetost ter izmerimo časovni potek napetosti, toka in gostote svetlobnega toka. Rezultati so prikazani na sliki 5. Iz meritve sledi, da je $\theta_0 = 0{,}015$. Od tu lahko ocenimo maso žice na 18 mg, če upoštevamo specifično toploto volframa 130 J/kgK. Pri poskusu smo uporabili 25-vatno žarnico, namenjeno napetosti 5 V, z žico premera 180 μm, dolžino 3,1 cm in maso 16 mg, ki jo izračunamo iz $m = \rho V$, kjer uporabimo gostoto volframa 19 kg/dm^3.



Slika 5. Trenutna električna moč in svetilnost žarnice, priključene na izmenično napetost. Svetilnost niha z amplitudo 0,06 povprečne svetilnosti in v fazi zaostaja za močjo.

Tako smo natresli nekaj podatkov za žarnice. Jih bomo prihodnjič opazovali v drugačni luči?

LITERATURA

[1] I. Kuščer in A. Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, DMFA, 112–114 (1994).

[2] A. Mohorič, *Utripanje luči*, Presek **38** (2011), 20–21.

[3] P. Gluck in J. King, *Physics of Incandescent Lamp Burnout*, Phys. Teach. **46** (2008), 29–29.

[4] B. Ray, *Don't Zap that Light Bulb!*, Phys. Teach. **44** (2006), 374–374.

[5] B. Denardo, *Temperature of a lightbulb filament*, Phys. Teach. **40** (2002), 101–101.

[6] W. S. Wagner, *Temperature and color of incandescent lamps*, Phys. Teach. **29** (1991), 176–176.

[7] D. MacIsaac, G. Kanner in G. Anderson, *Basic physics of the incandescent lamp (lightbulb)*, Phys. Teach. **37** (1999), 520–520.

[8] J. King, *Incandescent Lamps*, Am. J. Phys. **31** (1963), xiv.

[9] V. Zanetti, *Sun and lamps*, Am. J. Phys. **52** (1984), 1127–1127.

[10] D. C. Agrawal, H. S. Leff in V. J. Menon, *Efficiency and efficacy of incandescent lamps*, Am. J. Phys. **64** (1996), 649–649.

[11] V. Zanetti, *Temperature of incandescent lamps*, Am. J. Phys. **53** (1985), 546–546.

OB ROB PRISPEVKA PETRA PRELOGA O STANJU V NAŠEM ŠOLSTVU

BOJAN HVALA IN DAMJAN KOBAL

V 1. številki Obzornika 2012 je izšel članek Petra Preloga, ki se odziva na dva članka (Babič, Zabret) o slabem stanju v našem šolstvu.

Peter zaskrbljeno ugotavlja, da se nihče od poklicanih strokovnjakov na članka ni odzval, da ni nikogar, ki bi se (bralcem Obzornika, učiteljem, staršem, učencem in vsem drugim) čutil dolžnega stvari v šoli postaviti na pravo mesto. Peter niti ni razočaran nad ministrom in državnim aparatom, ampak nad strokovnjaki, ki se ne oglasijo in ne povedo dovolj jasno in glasno, kako narobe so stvari.

Petrovi jezi in očitkom, vsaj nekateri, težko oporekamo. Zagotovo je velika odgovornost vseh nas, ki ne storimo dovolj, da bi se stanje izboljšalo. Za situacijo, kakršnakoli že je, smo soodgovorni vsi. Se pa odgovornost deli glede na možnosti, položaj in pristojnosti, ki jih imamo.

Preden nadaljujeva, naj poudariva, da ta prispevek nikakor ni odziv strokovne javnosti, ki ga Peter pogreša. Celo nasprotno, verjameva, da je velik del problemov (tako v družbi kot v izobraževanju) prav v pomanjkanju osebne odgovornosti, ki se je skoraj povsem umaknila abstraktni strokovni odgovornosti. Zapisane misli so torej le osebna stališča človeka, učitelja, matematika, starša in državljana z imenom in priimkom.

1. O „postavljanju stvari na pravo mesto“.

Res je, da so družbeni problemi kompleksnejši od problemov eksaktnih znanosti. Zato so tudi resnice teže preverljive, napake teže dokazljive in „prave rešitve“ teže določljive. Tako se, drugače od resnic v matematiki, mnenja o resnicah v šolstvu razhajajo. Nekateri menimo, da je situacija v izobraževanju (in na sploh v družbi) res zelo slaba. Drugi verjamejo, da smo priča začasnim težavam na poti napredka. Nekateri verjamejo celo to, da so bili trendi v šolstvu zadnje čase pozitivni in da je problem le v tem, da jih nismo razvijali še hitreje.

Nekaj tipičnih (prepletajočih se) tematik, ob katerih so mnenja v družbi zelo različna:

- permisivna vzgoja, odnos do odrekanja, napora in trdega dela;
- poklicno usmerjanje (glede na želje ali/in glede na sposobnosti ter potrebe družbe);
- potreba po selektivnosti in primerni organizaciji šolske mreže;
- elitizem ali egalitarizem ocenjevanja in znanja;

- vloga prava v šolski praksi;
- imeti ali vedeti (razvijati strast/potrebo po posedovanju ali po razumevanju);
- način sprejemanja temeljnih odločitev (v šoli in v družbi).

To so le nekatera področja, na katerih ni soglasja. Zato ni presenetljivo, da v družbeni organizaciji, kot jo poznamo, nimamo „pravih rešitev“. Se pa strinjamo, da je obseg vsebinske in zavezujoče razprave o vseh teh temah presenetljivo ozek.

2. O vtisu, da na dogajanje v šolstvu ni ustreznih odzivov.

Res je, kot pravi Peter, da ni odzivov, ki bi kaj spremenili. Ni pa res, da odzivov na dogajanje v šolstvu sploh ni. V 4. številki Obzornika 2010 sta podpisnika tega zapisa predstavila nekaj precej jasnih smeri, po katerih bi bilo treba stopiti, da bi se kakovost v naših šolah izboljšala. V članku so navedena stališča glede večine zgoraj navedenih dilem v šolstvu in jih zato na tem mestu ne bi ponavljali. Omenjeni članek je bil prispevek na enem od posvetov, ki jih je organiziral SAZU na temo problematičnih razmer v šolstvu, na katerih so na težave opozarjali tudi drugi.

Seveda je tudi drugih kritičnih zapisov in mnenj o omenjenih dilemah veliko. Iz množice opozoril glede pogubnih posledic permisivne vzgoje izpostavimo že precej staro, a temeljno delo Bogdana Žorža [1]: *Razvajenost, rak sodobne vzgoje*. Strokovnjaki, predvsem tisti, ki se na terenu praktično ukvarjajo z zdravljenjem psihičnih težav in odvisnosti med mladostniki, na to temo že dlje časa bijejo plat zvona. O mnogih vidikih prevladujoče vzgoje, npr. o odsotnosti zavesti, da sta tudi *nelagodje* in *napor* normalna sestavna dela vsake človekove aktivnosti, prepričljivo govori Viljem Ščuka ([2]). Znamenita je njegova krivulja, podobna grafu funkcije $f(x) = -\sin x$ na intervalu $[0, 2\pi]$, ki opisuje ugodje v različnih obdobjih vsakega človekovega projekta. Brez „negativnega ugodja“ (napetosti, napora in dela) tudi „pozitivnega ugodja“ (uspeha, zadovoljstva in rezultata) ni. Znana so tudi poglobljena razmišljanja uglednih pravnikov, npr. Mira Cerarja ([3]) o mejah implementacije prava in formalnega v šolskem prostoru. Poleg formalne ravni namreč obstajajo še druge (zdravorazumske, etične), ki jih mora šola skrbno gojiti in upoštevati. Tudi v zvezi z inflacijo odličnih ocen smo bili priče številnih opozoril tako v strokovni literaturi ([4]) kot tudi v časopisih in na okroglih mizah ter predavanjih. Na to temo smo pred kratkim brali tudi odmeven članek maturanta ([5]), ki v duhu *Cesarjevih novih oblačil* opozarja tudi na splošno pomanjkanje zavesti, da je v fazi načrtovanja osebne kariere poleg individualnih želja nujno upoštevati tudi osebne danosti in sposobnosti.

Tako bi lahko naštevali še naprej. Žal vsa ta razmišljanja v morju navzkrižnih mnenj in neargumentiranega odločanja ostajajo premalo slišana in neupoštevana.

3. Ali do spremembe lahko pride s poenotenjem strokovne javnosti?

Bojimo se, da ne. Tako javnost posameznikov kot strokovna javnost sta pogosto zapredeni v mreži egoizma in razpada vrednot. „Strokovnost“ je postala tržno blago. Nekoč (npr. *po* Josephu Priestleyu (1733–1804)) je bila znanost iskalka absolutne resnice in znanstvenika (strokovnjaka) so definirali *radovednost*, *pozornost/občutljivost*, *vztrajnost*, *verodostojnost*, *dvom*, *pogumna ponižnost*, *predanost*. Danes strokovnjaka definira diploma, vrednost in verodostojnost znanosti pa se meri z *dodano vrednostjo*. Spreminjajo se način komunikacije, pomen in zavest o resnici. Z zavestjo, ki množično sprejema in celo promovira „individualne in relativne resnice“, je vse težje priti do smiselnih družbenih rešitev. Ali, kot piše Ben Dupré v [6, str. 55]:

Dandanes posebno zahrbtno oviro nalogi izobraževanja predstavlja [...] *relativizem, ki ne priznava ničesar, kar bi bilo neizpodbitno, kot glavno merilo pa vidi posameznika in njegove želje. Pod pretvezo svobode pa [relativizem] postane zapor za slehernika, saj ljudi med seboj razdvaja in jih priklaplja same nase, na „ego“.*

Kako zelo se spreminja dojemanje argumenta in „resnice“, nam lahko pove knjižica *On Bullshit* (O nakladanju/govoričenju) ([7]), ki jo je napisal ugledni moralni filozof Harry Frankfurt. V njej govori o tem, kako usodna je za razvoj družbe inflacija (pomena) besed. Nakladanje je po njegovem mnenju nevarnejše od laži. Pri laži se namreč pojem resnice ohranja, saj lažnivec resnico skriva in se je zato (vsaj) zaveda. Nakladač (in njegovi poslušalci) pa postopoma postanejo povsem indiferentni do laži in resnice, saj je razlika med njima povsem nepomembna in obe uporablja le, če mu služita (v obsesiji potrošniškega ugodja).

Na podlagi razbitja iluzije o vsemogočnem človeškem umu so zadnja desetletja zaznamovana s pretiranim krčenjem razsvetljenskega zaupanja v moč razuma. Namreč, reakcija na (sicer povsem razumno) spoznanje, da razum niti ne ponuja vseh rešitev niti ne more povsem zaobjeti vseh spoznavnih vidikov, je bila pretirana. Nihalo je zanihalo nazaj in videti je, kot bi celo v povsem preprostih situacijah začeli iskati rešitve z „alternativnimi sredstvi“, brez moči argumenta. Ali, kot piše Francis Wheen v [8, str. 19]:
...[po razsvetljenstvu] *je naslednjih 200 let razum ohranil svoje mesto kot arbiter resnice in kot temelj objektivnega védenja.* [Sedaj pa] *razum nazaduje tako kot ideal in tudi kot realnost.* [...] *Ko pa razum spi, se v ospredje prerinejo pošasti, in zadnji dve desetletji sta jih ustvarili obilo.*

V svetu s takšnimi trendi je poučevanje matematike še posebej težavno. V svojem bistvu namreč matematika uči prav to, kar moderni svet vrednot zanika, to je občutljivost za argument. In jasno je, da se mnogim v hiperinflaciji besed in ob razcvetu „lahkotnosti bivanja v objemu alternativnih metod“ matematika zdi nekoristna in sitna starka.

4. Kje je torej rešitev?

Kje, kako torej začeti z akcijo? Ugledni in že davno upokojeni profesor Barry MacDonald (Univerza Vzhodne Anglije) je že pred iztekom minulega tisočletja o reformah v šolstvu povedal tole:

Vsi vemo, da gredo stvari v šoli hudo narobe. Politiki in reformatorji so prepričani, da vedo, kaj je treba storiti. Ker smo, ne da bi kdaj kdo priznal napako, v zadnji polovici stoletja imeli že veliko propadlih reform, reformatorjem nihče ne verjame. Potrebujemo nov kurikulum za skepticizem, potrebujemo pokaži-ne-govori kurikulum … Reforme so šolo pripeljale do sterilnosti, ki mrtvi um, onemogoča ustvarjalnost in inteligenco ter vsiljuje surovo tehnologijo.

Takšne in drugačne reforme, ki so nas tudi pripeljale v trenutno stanje, so se vse dogajale z blagoslovom in podporo strokovnjakov ter v imenu slabo premišljenih in navidezno zveličavnih idej. Zato namesto novih naivnih in bojevitih reform predlagamo raje zbran razmislek s sklonjeno glavo.

V zgodovini smo imeli in tudi še imamo družbe in skupnosti, ki so spodbujale iniciativnost ljudi, ki so ustvarjale občutek, da se z lastno aktivnostjo da napredovati, da se agilnost splača, da bo vložena energija posameznika mnogotero poplačana. To so bile in so družbe in skupnosti v vzponu. Poleg teh smo imeli in imamo tudi družbe, kjer je iniciativnost nezaželena, diskreditirana ali celo kaznovana. Ozračje v našem šolstvu spominja bolj na to drugo. Sistem je obsežen, odtujen, vzgibi odločanja netransparentni in povezani z birokracijo in strankokracijo. Večji strokovni premiki imajo svoje korenine v vsakokratnih na hitro sestavljenih koalicijskih pogodbah, te pa v programih strank, ki šolstvu posvečajo premalo pozornosti, v odločanje pa jim ne uspe pritegniti ustreznih ljudi. Zato medli upanje, da bi posameznik z lastnim vložkom lahko plemenitil ali izboljšal kaj več kot svoje področje najožje osebne odgovornosti, ki se čedalje bolj krči. Širi se malodušje in indiferentnost. Prav indiferentnost pa je kuga moderne dobe.

Za izhod iz vsega tega vidimo dve možnosti. *Prva* je, da bi zavest o nujnosti sprememb pod težo dejstev diskreditirala staro in še vedno moderno paradigmo udobja do te mere, da bi se nam, zbranim okrog nekega razumnega in karizmatičnega jedra, uspelo poenotiti za niz tihih, a vsebinsko pomembnih sprememb. A kot je videti pri nas, tudi v drugih družbenih sistemih stare paradigme ne padajo zlahka, prav tako pa se karizmatična jedra z zbranimi treznimi rešitvami ne pojavljajo prav pogosto. Morda za to preprosto še ni dozorel čas. Zato bi bila morda *druga* rešitev v večji svobodi, večjem pluralizmu in iniciativnosti v našem (javnem!) šolstvu. Če glede osnovnih izhodišč nimamo enotnih mnenj, pa naredimo šole, ki bodo bolj različne, kot so zdaj, ki bodo bolj paradigmatično oblikovane. Tako bodo starši z izrazito skrbjo za otrokovo udobje dobili šolo, kjer bo – kot je nekoč že veljalo – učenec na uro lahko zamudil prvih 15 minut, odšel

15 minut pred koncem, kjer domače naloge ne bodo obvezne in kjer bodo prevladovale odlične ocene ter nenehne pohvale in aplavzi. Starši, ki želimo, da se naši otroci razvijejo v delovne in odgovorne posameznike, pa bomo dobili šole, ki bodo polne izzivov in otrok ne bodo podcenjevale, v katerih bosta delo in spoštovanje dogovorov samoumevna, ki bodo sicer zagotavljale dostojanstvo vsakega učenca, a tudi zaznale njegovo (vsakovrstno) sposobnost in priznale delovni vložek. V teh šolah se inšpektorji in odvetniki ne bodo ukvarjali s formalnimi malenkostmi in kraljevali bodo iskriva radovednost, medsebojno spoštovanje, zavzetost in moč argumenta. V soočenju dveh (lahko tudi več) konceptov bi morda na kratki rok vzpodbudili iniciativnost pri izgradnji identitete in stila posamezne šole. Zaradi možnosti izbire opcij bi se v družbi morebiti posledično odprl (dejanski in vsebinski) diskurz o prednostih in pomanjkljivostih različnih pristopov. Na dolgi rok pa bi morda kakovost (še zlasti če bi bila prepoznana tudi na zaposlitvenem trgu) le prevladala nad navideznim udobjem.

5. Za konec

Odziv g. Petra Preloga je dragocen izraz senzibilnosti in primer upravičenega protesta ter kritične odločnosti, ki, nasprotno od škodljivega malodušja, drami zavest odgovornosti. Taki odzivi so pomembni ne toliko zaradi kmalu pričakovanih rešitev, ampak zaradi odmevov, ki jih zbudijo v naših glavah, in zaradi zavezništev, ki jih utegnejo vzpostaviti med podobno mislečimi.

Za reševanje matematičnih problemov so potrebni sposobni ljudje. Družbeni problemi so kompleksnejši od matematičnih. Zato bi za njihovo reševanje potrebovali najsposobnejše. Kako poskrbeti za to, da bi odločali najbolj sposobni in ne najbolj samozavestni, ostaja težak problem od začetkov civilizacije.

LITERATURA

[1] Bogdan Žorž, *Razvajenost, rak sodobne vzgoje*, Mohorjeva družba, Celje, 2002.

[2] Viljem Ščuka, *Šolar na poti do sebe, Oblikovanje osebnosti, Priročnik za učitelje in starše*, Didakta, Radovljica, 2007.

[3] Miro Cerar, *Pamet v krizi, Razmišljanja o miselnih, čustvenih in duhovnih izzivih sodobnega človeka*, Tempo trade, Škofja Loka, 2011.

[4] Darko Zupanc, Matevž Bren, *Inflacija pri internem ocenjevanju v Sloveniji*, Sodobna pedagogika **61** (2010), št. 3, str. 208–228.

[5] Andrej Šterman, *Pismo maturanta — Absurdi*, dostopno na spletu: `http://www.delo.si/mnenja/blog/pismo-maturanta-absurdi.html`, povzeto 8. 10. 2012.

[6] Ben Dupré, *Filozofija, Najpomembnejša dognanja človeštva*, Videotop, Maribor, 2011.

[7] Harry Frankfurt, *On Bullshit*, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2005.

[8] Francis Wheen, *Kako so prodajalci megle zavladali svetu*, Mladinska knjiga Založba, Ljubljana, 2004.

Gorazd Planinšič: Didaktika fizike – aktivno učenje ob poskusih, I. Mehanika in termodinamika, DMFA - založništvo, Ljubljana 2012, 215 str.

Knjiga me je pritegnila s svojo vsebino s tolikšno silo, da sem jo prebral skoraj v celoti že prvi dan po nakupu. Vsa „nujna“ dela so morala počakati. Ko bi bila izdana pred desetletjem, bi mi prihranila marsikatero iskanje poti do pravilne in ustrezne razlage. Ure fizike bi bile za moje učence še bolj zanimive in njihovo razumevanje naravoslovja bi bilo bolj bogato. Sodobno didaktično literaturo Slovenci potrebujemo.

Gorazda Planinšiča poznamo kot izvrstnega predavatelja, didaktika in odličnega izvajalca fizikalnih poskusov. V knjigi je uporabil vse svoje izkušnje in znanje, ki si jih je pridobil pri pedagoškem delu, postavitvi poskusov v Hiši eksperimentov, vodenju vsakoletnega seminarja „Stalno strokovno spopolnjevanje“, delovanju v mednarodnih združenjih in pri pisanju člankov. Knjiga si zasluži, da jo postavi vsak učitelj fizike v svoj kabinet in jo uporablja pri pripravah na pouk.

Podnaslov Mehanika in termodinamika obljublja, da avtor snuje nadaljevanje, za kar bi mu bili vsi hvaležni. V uvodnem delu knjige se je osredotočil na namen in na vlogo izvajanja poskusov pri pouku. Podal je pregledno razdelitev vrste poskusov in opisal, kje in kako jih uporabiti. „Očetovski nasveti“ so odlični in bodo prihranili učitelju marsikatero razočaranje pri poučevanju in eksperimentiranju. Poudari znano resnico, da si je treba sproti zapisovati dejstva in opažanja pri pripravi pouka in sami izvedbi ter izboljševati izvajanje ur iz leta v leto. Pri poučevanju fizike so pomembna vprašanja učencem. Ta naj bodo nedvoumna in nikakor zavajajoča. Učitelj naj ne odgovarja na vprašanja sam. Posluša naj učenca do konca, tudi če je v zmoti. Vzpodbuja naj razmišljanje. Odgovore naj učenci utemeljujejo. Za pravilen odgovor naj pohvali, za napačnega naj vzpodbudi diskusijo, zakaj je nepravilen.

Učitelj naj ne izvaja v razredu poskusov, ki jih ne zna razložiti ali jih učenci niso sposobni razumeti. Pozornost naj bo usmerjena na sam pojav. Izid eksperimenta naj opišejo učenci. Vsak poskus moramo vrednotiti z očmi poslušalca. Če je le možno, poskus ponovimo. Ponovitve lahko izvajajo učenci. Učenci naj bodo aktivni in naj čim več sodelujejo pri izvajanju poskusov. Če je le mogoče, izvajajmo v šoli realne poskuse in ne virtualnih (računalniške simulacije ali posnete poskuse). Vsak poskus je treba dobro pripraviti in se izuriti v njegovi izvedbi.

Avtor je pripravil zelo koristen opis pomembnejših merilnih naprav in pripomočkov, ki naj bi jih učitelj uporabljal pri pouku. Svetuje, kateri pripomočki so bolj uporabni pri pouku, tako da učitelj ne bi zapravljal denarja za naprave, ki bi obležale v kabinetu. Poučujemo generacije za prihodnost, zato naj bi učitelj vključeval in uporabljal sodobne naprave, ne zastarelih, ki jih ni več v splošni rabi. Sodobna oprema nam z digitalizacijo omogoča prikaz meritev v realnem času, omogoča obdelavo podatkov in risanje diagramov. Med cenovno dosegljive naprave uvršča: računalnik, vmesnik, merilne sonde, laser, digitalni fotoaparat, infrardeči termometer, svetleče diode. Za delo z novejšimi pripomočki se učitelji srednjih šol usposabljajo v okviru Stalnega strokovnega spopolnjevanja (`http://sss.fmf.uni-lj.si/index.php?mode=1&sub=1`), učitelji osnovnih šol pa na seminarjih Pedagoške fakultete.

Mehanika in termodinamika sta obdelani po temah učnega načrta. Pri vsaki temi avtor povzame bistvena dejstva, ki naj bi jih učenci spoznali. Za učitelja so zlata vredna opozorila na težave učencev in dijakov pri razumevanju posameznih pojmov in na njihove predstave o pojmih in pojavih. Predstave, s katerimi pridejo učenci k pouku, se pogosto ne ujemajo s fizikalnimi (npr. teža in masa). Svetuje, kako poučevati, da učenci postopoma zgradijo pravilne predstave. Ali ste vedeli, da je vzgon posledica gravitacijskega privlaka? Toplota je proces in ne stanje ali lastnost telesa.

Knjiga privlači s konkretnimi poskusi. Na izbranih primerih predstavi način kako obravnavati posamezna poglavja. Opis izvedbe je podrobno opisan skupaj z natančnimi nasveti, na kaj moramo paziti pri pripravi samega poskusa. Omeji se na preproste poskuse, ki so nazorni, zanimivi in jih dijaki lahko ponovijo in izvedejo sami tudi doma. Zagovarja aktivno sodelovanje učencev.

Avtorjev način, kako pripravi in izvede poskus, je sodoben, marsikdaj že raziskovalen. Vsak poskus ima dodatek z raznimi možnostmi razširitve, variacijami in dopolnitvami. Mnoge poskuse avtor obdela v veliko možnih variantah, da si jih učitelj lahko prilagodi svojim ciljem in potrebam. Hkrati daje možnost dijakom, da poskus obdelajo samostojno v obliki seminarskih nalog. Vedno opozori na podrobnosti, ki lahko pomembno vplivajo na izid poskusa. Dijake vzpodbuja, da sami razložijo izid poskusa, in predlaga dodatne poskuse, s katerimi lahko ovržemo tipične napačne razlage. V poskusih išče pogosto tudi humor in presenečenja.

Pri prebiraju knjige se bo učitelj pogosto zavedel, kje vse je napačno ravnal pri demonstraciji poskusov. Knjiga vzbudi pri bralcu razmišljanje, kako bi posamezni poskus izvedel in izpopolnil, katere poskuse bi še lahko prikazal za boljše razumevanje snovi. Za poskuse Planinšič pogosto uporabi material in predmete, ki jih kot neuporabne mečemo v smeti. Za razlago pogosto uporablja primere iz vsakdanje uporabe, ki so slikovita ilustracija posameznih zakonov. Poznani primeri pomagajo k razumevanju zakonov, še bolj pa so napotek k pravilnim predstavam dogajanja in pomoč za pomnjenje posameznih teoretičnih zaključkov.

Knjiga kaže na avtorjev izvrsten pregled čez didaktično literaturo. Že med tekstom opozarja na uporabno literaturo, kjer najdemo izvorne podrobnejše informacije. Seznam literature na koncu knjige obsega kar osem strani. Veliko predstavljene literature je slovenske, za kar zasluži avtor pohvalo.

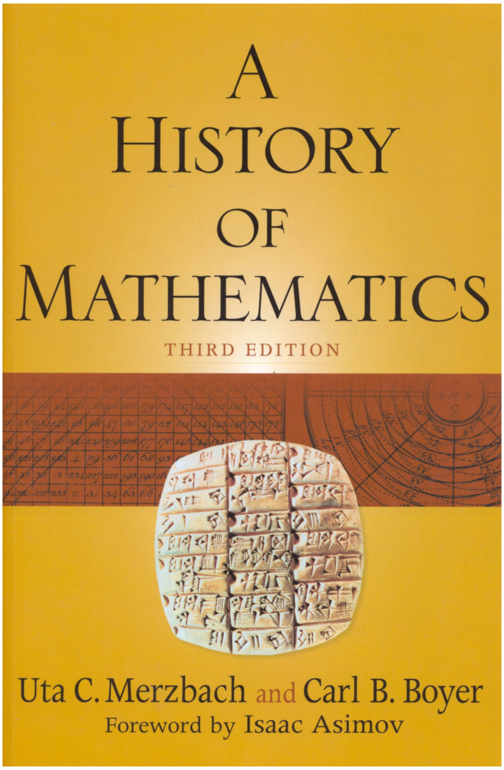
Če potrebujem poskuse za svoja občasna poljudna predavanja, samo prelistam knjigo, in že je nabor poln. V knjigi sem dobil tudi veliko idej za svojo zbirko nalog Znam za več, Fizika 8 in 9, izdano pri založbi Rokus.

To knjigo smo učitelji fizike potrebovali, kar dokazuje, da je bila prva naklada razprodana v manj kot letu dni. Težko pričakujemo že nadaljevanje.

Knjiga je bila ponatisnjena in jo lahko kupite pri DMFA – založništvo po članski ceni 23,99 EUR.

Stane Arh

Uta C. Merzbach in Carl B. Boyer, A history of mathematics, Third edition, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2011, 688 strani.



Knjiga izčrpno in pregledno podaja razvoj matematike skozi zgodovino od najstarejših časov do danes, tako kot v večini tovrstnih del. Smiselno je razdeljena na štiriindvajset poglavij. Ko je govor o matematiki različnih dežel, navadno najprej opiše ustrezno obdobje in najpomembnejše vire.

Delo se prične z opisom najstarejših dejavnosti, ki so povezane z matematiko: štetjem in zapisovanjem števil. Sledita, kot je navada v matematičnozgodovinskih knjigah, matematiki nam najbližjih starih kultur: egipčanska in mezopotamska. Nato je razmeroma obširno obravnavana starogrška matematika, od Talesa in Pitagore do Platonove Akademije in Aristotela. Evklidu in njegovim *Elementom* je posvečeno posebno poglavje, prav tako Arhimedu in Apoloniju iz Perge. Nadaljevanje pripoveduje o uspešnem aleksandrijskem obdobju, v katerem so se na primer izkazali Eratosten, Ptolemaj, Heron, Diofant in Papos, ter zaton tega obdobja, po katerem so omembe vredni le še Boetij in nekateri bizantinski matematiki.

Potem sta v knjigi na vrsti kitajska in indijska matematika. Slednji je odmerjenega nekoliko več prostora, saj smo iz Indije posredno dobili desetiški številski sistem, znak za ničlo, nekaj algebre in izboljšano trigonometrijo. Posredniki med indijsko in evropsko matematiko so bili večinoma arabski in perzijski matematiki, katerim gre zahvala, da se je ohranilo tudi marsikatero starogrško matematično delo. Medtem ko je kar nekaj stoletij cvetela islamska matematika, je zahodni, latinski svet v znanosti nasploh bolj ali manj životaril, toda med obema svetovoma je kljub vsemu ves ta čas prihajalo do pristnih stikov in Evropejci so počasi le napredovali. Ustanavljale so se prve univerze in akademije. Veliko se je tudi prepisovalo, ker še ni bilo tiska, in prevajalo, predvsem starogrška in arabska dela. Tu in tam pa so matematiki odkrili in staremu dodali tudi kaj novega.

Velik razmah znanosti in umetnosti ter z njima tudi matematike je v Evropi nastopil z renesanso. Velik preobrat je bilo splošno sprejetje desetiškega številskega sistema, vpeljava simbolov za računske operacije in uporaba črk za spremenljivke in konstante.

Razvoja matematike potem ni bilo več moč zaustaviti. Postopoma so se uvajali logaritmi, novi računski pripomočki in infinitezimalne metode. Matematiki različnih dežel so začeli med seboj intenzivno pisno komunicirati in potovati iz kraja v kraj. Postavljali so se novi in novi problemi, zlasti v geometriji in teoriji števil. Do novih rezultatov so prihajali matematiki na evropskem kontinentu, znanstveno pa so napredovali tudi v Veliki Britaniji.

Posebna poglavja v knjigi so namenjena Eulerju, francoskim matematikom pred veliko buržoazno revolucijo in po njej ter Gaussu. Tako kot vedno je veliko nove matematike nastalo iz konkretnih potreb, veliko pa tudi na popolnoma abstraktnih osnovah, tako kot že pri starih Grkih.

Naslednja tri poglavja so namenjena geometriji, algebri in analizi. Omenimo le nekaj tem oziroma matematikov, ki so povezani s temi področji: opisna geometrija, projektivna geometrija, analitična geometrija, neevklidske geometrije, večrazsežni prostori, algebraična geometrija; Boole, De Morgan, Hamilton, Cayley, Sylvester, Grassmann; Riemann v Göttingenu, Weierstrass v Berlinu, Dedekind, Cantor, matematična fizika, analiza v Franciji.

Predzadnje poglavje pokriva dvajseto stoletje in njegovo dediščino. Poudarjeno je, da so matematična raziskovanja v tem stoletju postala svetoven proces. Od osebnosti izstopajo Hilbert, Poincaré in Bourbaki, od področij pa teorija mere, funkcionalna analiza, splošna topologija, moderna algebra, diferencialna geometrija, tenzorska analiza, homološka algebra, teorija kategorij, algebraična geometrija, logika in računalništvo.

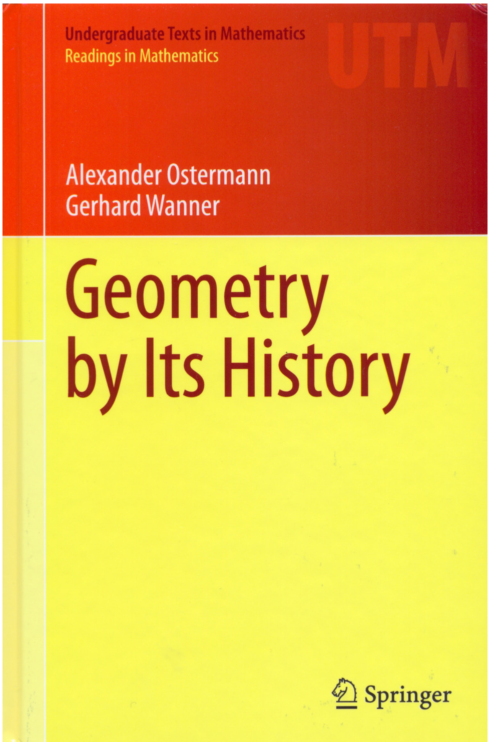
Zadnje poglavje pripoveduje o novejših raziskovanjih v matematiki, kot so na primer problem štirih barv, klasifikacija končnih enostavnih grup, Fermatov zadnji izrek, Poincaréjeva hipoteza. Rečeno je, da so veliko vlogo pri rešitvi problema štirih barv odigrali računalniki, matematiki pa kljub temu iščejo klasičen dokaz. Delo se konča s pogledom v prihodnost in mislijo Andréja Weila, da bodo v matematiki velike ideje tiste, ki poenostavljajo, tako kot je bilo že v preteklosti.

Po knjigi se da kar hitro iskati, ker ima že na začetku izčrpno glavno kazalo, na koncu pa še stvarno kazalo z imeni in osnovnimi pojmi. Seveda je dodan tudi obsežen seznam literature, poleg splošnega še za vsako poglavje posebej. Knjiga je ilustrirana s številnimi skicami in fotografijami. Morda bi ji bilo dobro dodati le še kaj malega o japonski matematiki, teoriji kaosa, fraktalov in katastrof.

Še nekaj besed o avtorjih. Uta C. Merzbach, rojena leta 1933, je študirala matematiko na univerzi v Austinu v Teksasu in na Harvardu, kjer je leta 1965 doktorirala iz matematike in zgodovine znanosti. Napisala je več del s tega področja, kjer je aktivna tudi po svoji upokojitvi. Carl B. Boyer (1906–1976) je doktoriral na univerzi Columbia leta 1939. Od leta 1952 do svoje smrti je bil profesor matematike na brooklinskem kolidžu. Napisal je več del iz zgodovine matematike.

Marko Razpet

Alexander Ostermann in Gerhard Wanner, Geometry by its history, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012, 449 strani.



Avtorja predstavljata geometrijo zgodovinsko, tako kot je nastajala. Knjigo sta razdelila na dva dela. V prvem obravnavata klasično, v drugem pa analitično geometrijo. Prvi del sta razdelila na pet, drugega pa na sedem poglavij. Ker seveda ni mogoče celotne geometrije z vsemi podrobnostmi zajeti v eni sami knjigi, predstavita le bistvene ideje.

Prvih pet poglavij avtorja posvetita stari grški geometriji. V prvem poglavju so zajete naslednje vsebine: Talesov izrek, podobni liki, lastnosti kotov, pravilni večkotniki, računanje ploščin, Pitagorov izrek in trije znameniti problemi grške geometrije. Drugo poglavje je v glavnem posvečeno nekaterim knjigam Evklidovih *Elementov*. Pomembne vsebine tega poglavja so: lastnosti krogov in kotov, teorije razmerij, tudi Evdoksova, v kateri je 22 stoletij kasneje Dedekind verjetno dobil navdih za svojo teorijo presekov, iracionalnost, prostorska geometrija, ploščina kroga, prostornina piramide, stožca in krogle ter platonska telesa. Tretje poglavje predstavlja stožnice, ki jih je študiral že Apolonij iz Perge. Pomembnost stožnic se je pokazala šele s Keplerjevimi zakoni. Četrto poglavje predstavlja nekatere nadaljnje napore in rezultate v evklidski geometriji, na primer: tretjinjenje kota z Nikomedovo konhoido, Arhimedovo spiralo, znamenite točke v trikotniku, Menelajev in Cevov izrek, Eulerjevo premico, Steinerjeve in druge izreke v zvezi s trikotniki in krogi. Zadnje poglavje prvega dela knjige obravnava trigonometrijo, kakršno so poznali stari Grki in Arabci. Kotnih funkcij, kakršne imamo danes, v antičnih časih še niso poznali. Ptolemaj je v svojem *Almagestu* uporabljal samo eno: tetivno funkcijo, ki obodnemu kotu v krogu priredi dolžino ustrezne tetive. Pod vplivom indijske matematike se je od 7. stoletja naprej začela uporabljati polovica tetive, ki ustreza polovici središčnega kota, kar nam je dalo sinusno funkcijo. V tem poglavju je pokazano, kako razrešujemo ravninske in sferne trikotnike, kaj je stereografska projekcija in velika Keplerjeva ter Newtonova odkritja.

V drugem delu knjige prva tri poglavja pokažejo, kako je napredovala geometrija, vzporedno z razvojem algebre v času Descartesa, Eulerja in Gaussa. Spoznamo, kako so se lotili približne konstrukcije pravilnega sedem- in devetkotnika, tretjinjenja kota in reševanja kubične enačbe. Izpeljani sta formuli za ploščino trikotnika in tetivnega štirikotnika z znanimi stranicami – Heronova in Brahmaguptova formula. Nato delo preide na kartezične koordinate. Podani so zapisi enačbe premice, krožnice, stožnic in nekaterih drugih krivulj v teh koordinatah. Prav tako so vpeljani zapisi krivulj v parametrični in polarni obliki. Tu se srečamo s problemom iskanja tangent na krivulje in njihovih ukrivljenosti, pa tudi s problemom ekstremnih vrednosti funkcije. Poglavje v zvezi s konstruktibilnostjo z neoznačenim ravnilom in šestilom avtorja pričneta s kompleksnimi števili in logaritemsko spiralo. Med drugim opišeta Gaussovo konstrukcijo pravilnega sedemnajstkotnika in navedeta pogoj za konstruktibilnost pravilnega n-kotnika. Dokažeta, da ni možno z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruirati pravilnega sedemkotnika in da tudi ni možno rešiti treh znamenitih problemov grške geometrije samo s tema dvema pripomočkoma.

Deveto poglavje obravnava prostorsko geometrijo in vektorsko algebro. Poudarek je na uporabi vektorjev v analitični geometriji v prostoru, opisana sta Gaussova eliminacijska metoda in računanje prostornine paralelepipeda z vektorji, s katerimi so izpeljani nekateri izreki sferne geometrije. Tu najdemo tudi Pickov izrek, arhimedska telesa in veliko drugih zanimivosti. Deseto poglavje uvaja matrike in linearne preslikave, zamenjavo koordinat, Gramove determinante, ortogonalne preslikave in izometrije, Cayleyjevo transformacijo, lastne vrednosti in lastne vektorje matrik, kvadratne forme, stožnice in ploskve drugega reda. Predzadnje poglavje razloži osnovne pojme projektivne geometrije, njeno zgodovino in konča s projektivno teorijo stožnic. Zadnje poglavje vsebuje rešitve nalog, ki so v knjigi zapisane na koncu vsakega poglavja. Na koncu so našteti viri, dodano pa je tudi stvarno kazalo.

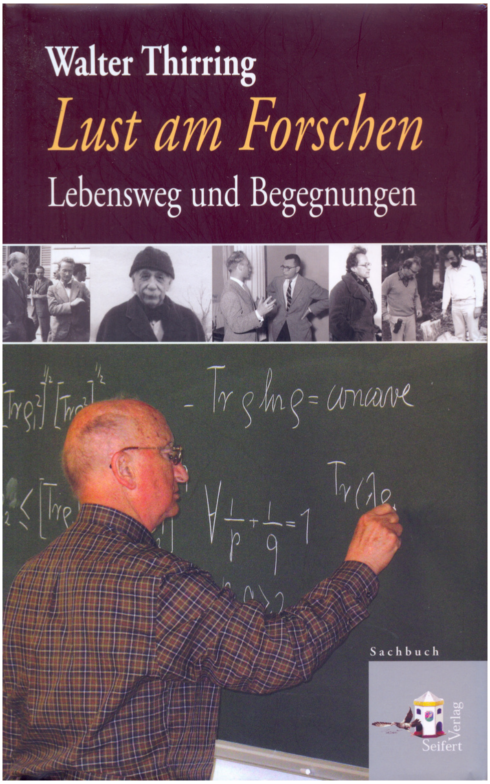
Knjiga prinaša veliko primerov, nalog, skic, geometrijskih konstrukcij, avtentičnih fotografij zgodovinskih predmetov in besedil. V njej je tudi mnogo citatov, komentarjev in izčrpnih pojasnil, tako da bralcu vse skupaj ponuja motivacijo za študij geometrije, obenem pa mu zagotavlja prijetno branje. Knjiga je namenjena predvsem dodiplomskim študentom in učiteljem.

Še nekaj besed o piscih. Oba sta avtorja ali soavtorja več matematičnih knjig in se očitno precej trudita, da bi bila matematika čim bolj odprta tudi navzven. A. Ostermann, rojen leta 1960, je doktoriral leta 1988 na univerzi v Innsbrucku in je profesor na matematičnem oddelku univerze v Innsbrucku. Opravljal je tudi funkcijo predstojnika tega oddelka in dekana fakultete za matematiko, računalništvo in fiziko ter matematičnega inštituta. Med drugim se ukvarja s časovno odvisnimi nelinearnimi parcialnimi diferencialnimi enačbami, ki so močno orodje za modeliranje kompleksnih dinamičnih procesov.

G. Wanner, rojen leta 1942, je doktoriral leta 1965 na univerzi v Innsbrucku. Bil je profesor na oddelku za matematiko univerze v Ženevi, predstojnik tega oddelka, predsednik enega od oddelkov švicarske akademije naravoslovnih znanosti in predsednik švicarskega matematičnega društva. Njegovo glavno raziskovalno področje je numerično reševanje diferencialnih enačb. Od leta 2004 je v pokoju. Omenimo knjigo *Analysis by Its History*, ki jo je Wanner napisal skupaj z Ernstom Hairerjem in je prav tako izšla pri Springerju leta 1996.

Marko Razpet

Walter Thirring, Lust am Forschen – Lebensweg und Begegnungen, Seifert Verlag, Dunaj, 2008, 288 strani + zgoščenka.



Avtorja knjige, ki jo predstavljamo, smo spoznali že v Obzorniku za matematiko in fiziko, **57**, št. 4 (2010) na straneh 144–146, kjer smo predstavili knjižico *Einstein entformelt*, ki sta jo napisala Cornelia Faustmann in Walter Thirring. V njej skušata bralcem čim enostavneje pojasniti Einsteinovo teorijo relativnosti. Medtem smo izvedeli, da je Cornelia uspešno doktorirala, Walter Thirring, rojen leta 1927 na Dunaju, pa je prejel častno maturitetno listino na gimnaziji, ki jo je nekoč začel obiskovati pa je zaradi druge svetovne vojne nikoli ni dokončal.

Tokrat pa predstavljamo Thirringovo avtobiografijo, katere naslov in podnaslov pomenita *Želja po raziskovanju – življenjska pot in srečanja*. Avtor bralcu že na začetku pojasni, da ni ravno leposlovni pisatelj in da bo zato njegov jezik razmeroma preprost. To praktično pomeni, da nam res ni treba znati posebno visoke nemščine, pa se knjigo že da kar prijetno prebirati, in to brez večjih težav.

Avtor najprej opiše izvor svojega priimka in svojo družino. Njegov oče, Hans Thirring (1888–1976), je bil tudi pomemben avstrijski teoretični fizik. Leta 1938–1945, od priključitve Avstrije k Tretjemu rajhu do konca druge svetovne vojne, so bila za Walterja *ukradena mladost*. Starejši brat Harald je izginil v vojni vihri neznano kje, očeta so zaradi njegovih pacifističnih nazorov in odobravanja Einsteinove in Freudove teorije prisilno upokojili, Walterja pa kot še ne šestnajstletnega leta 1943 vpoklicali za pomočnika v protiletalski obrambi. Takoj po vojni je bil kot nemški vojak nekaj let v francoskem ujetništvu, tako da ni mogel maturirati. Imel pa je veliko srečo, da se mu je ob splošnem pomanjkanju ljudi s fizikalnim znanjem uspelo vključiti v delo na univerzi v Innsbrucku. Razmere so se sčasoma uredile, tako da je leta 1949 kljub formalno nedokončani gimnaziji, a z dovolj znanja matematike in fizike, lahko doktoriral na Dunaju. Najbolj so ga pritegnile teorija relativnosti, kvantna fizika, kvantna elektrodinamika in kvantna teorija polja.

Njegova pot je potem šla hitro navzgor. Krajši čas je delal in raziskoval v Dublinu, Glasgowu, Göttingenu, Zürichu, Bernu, Princetonu, na slovitem MIT-u, v Seattlu, na Dunaju in v Ženevi. Za svoje najplodnejše obdobje si šteje leta od 1959 naprej. Leta 1971 se je dokončno vrnil na Dunaj, kjer je veliko napora vložil v ustanovitev Schrödingerjevega inštituta.

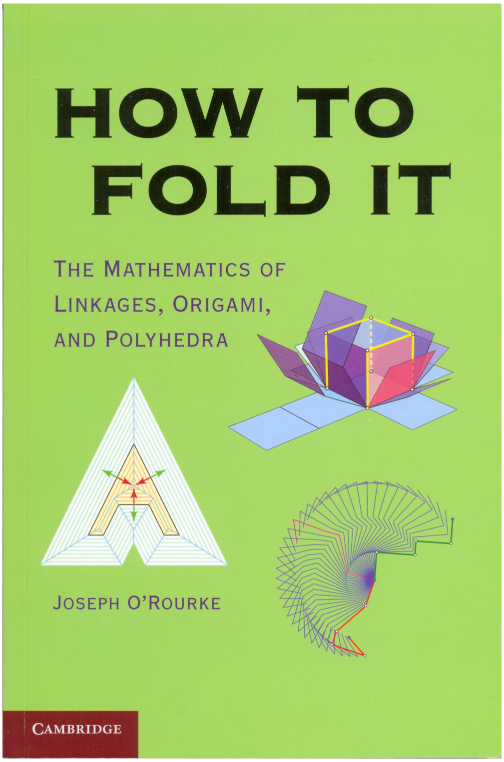
Na svoji življenjski poti se je osebno spoznal s pomembnimi fiziki, kot so na primer Erwin Schrödinger, Albert Einstein, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Robert Feynman, Elliott Lieb, Murray Gell-Mann, Arnold Sommerfeld, Guido Beck, Felix Ehrenhaft, pa tudi z drugimi osebnostmi, kot je bil na primer dunajski kardinal Franz König. Thirring se je upokojil leta 1997.

V Thirringovi knjigi ne najdemo samo veliko osebnih avtorjevih spominov in ne spoznamo le njegove splošne razgledanosti, ampak izvemo tudi veliko o pomembnih fizikih, ki so ogromno pripomogli k sodobnemu znanstvenemu pogledu na svet, in nasploh dobimo dober pregled nad tem, kaj se je v fiziki pa tudi v matematiki dogajalo v 20. stoletju. Knjiga se konča s poglavjem *Kaj je prineslo raziskovanje?*, kjer je na kratko razloženo prav to.

Thirring je avtor oziroma soavtor več fizikalnih knjig, ki so na voljo tudi v nekaterih naših knjižnicah. Spomnimo, da ima okoli 150 znanstvenih objav, številna mednarodna odlikovanja, med drugim Eötvösovo medaljo (1967), Schrödingerjevo nagrado (1969), Planckovo medaljo (1978), častni doktorat Univerze Comenius v Bratislavi (1994) in Poincaréjevo nagrado (2000). Thirringova druga velika ljubezen pa je glasba. Morda je ravno zato opisani knjigi dodana zgoščenka s posnetki njegove komorne glasbe, ki so jo izvedli ob njegovem 80. rojstnem dnevu na Dunaju.

Marko Razpet

Joseph O'Rourke, How to fold it – The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra, Cambridge University Press, Cambridge in drugje, 189 strani.



Sam naslov knjige ne pove prav veliko in bo marsikdo morda prehitro sklepal, da v njej ne gre za preveč resno matematiko in da nas avtor skuša naučiti le nekaj o prepogibanju papirja. Toda podnaslov pove, da se v knjigi obravnava prepogibanje še česa drugega. Kot otroci smo se radi igrali z mizarskim zložljivim metrom, ki smo ga prepogibali v zglobih in oblikovali različne like. Avtor to posploši in piše o *linkages*, kar pomeni nekakšno drogovje, v katerem so z zglobi povezani posamezni drogi. Besedi *origami* in *polieder* pa sta nam vsekakor bolj znani.

Vsebina knjige je logično razdeljena na tri dele. Prvi del obravnava drogovja, ki nas še najbolj spominjajo na robotske roke. Matematični model drogovja sestavlja določeno število daljic, ki predstavljajo toge droge, lahko različnih dolžin. Prva daljica je z enim krajiščem vrtljivo vpeta v neki negibni točki prostora, v tako imenovanem *ramenu*, preostale daljice pa so zaporedoma druga za drugo v krajiščih vrtljivo vpete razen zadnje, ki ima eno krajišče prosto. Najprej se vprašamo, kaj je območje dosega zadnje točke drogovja. Modelov je več vrst glede na to, kakšna je svoboda zasukov drogov v zglobih. Zanimiva so drogovja, pri katerih se izbrana točka lahko giblje po daljici oziroma po črti, ki je skoraj daljica. Spomnimo se na pantograf kot del električne lokomotive ali pa na pantograf v stari risarski tehniki. V ta del knjige spada tudi obravnava proteinske hrbtenice, pri kateri se neprestano ohranja kot med prečkami. Tu je poglavitno vprašanje, kolikšno največjo dolžino lahko doseže taka hrbtenica. Celo posebna vrsta tako imenovane *pop up kartice* spada v to področje. To so take prepognjene kartice, pri katerih ne vidimo, kaj se v njih skriva. Ko pa jih odpremo približno za pravi kot, izskočijo v prostor različne papirnate podobe.

Drugi del knjige je posvečen origamiju. Origami je japonska umetnost prepogibanja papirja, znana že od njegove iznajdbe na Kitajskem pred več kot 2000 leti. Za plosko prepognjene oblike je v knjigi zapisanih nekaj splošnih izrekov. Zanimiv je na primer izrek, ki pravi, da lahko vsak lik, ki ga narišemo z ravnimi črtami na pravokoten kos papirja, izstrižemo že z enim samim strigom z dovolj dolgimi škarjami, če le pred tem papir pravilno prepognemo v plosko obliko. Sledi problem, kako spraviti z gubanjem polieder v ploščato obliko, kako zgubati zemljevid na žepni format in kako izdelati nakupovalne vrečke, ki se dajo stisniti v ravninsko obliko, da s tem pri skladiščenju porabijo čim manj prostora.

Tretji del knjige se ukvarja s poliedri in njihovimi mrežami. Pokaže, kako s prirezovanjem iz enega poliedra dobimo drugega. Na znameniti grafiki *Melencolia I*, ki jo je ustvaril Albrecht Dürer, je marsikaj matematičnega, med drugim tudi magični kvadrat 4×4 in neki polieder, ki je nastal s prirezovanjem kocke. Knjiga omenja tudi okoli 500 let star *Dürerjev problem*, ki sprašuje, ali ima vsak konveksen polieder mrežo. Nato pridejo na vrsto problemi, kako polieder prerezati po čim manj robovih, da ga potem lahko razgrnemo v ravnini. Obravnavani so primeri poliedrov, ki imajo mrežo. Postavljen je še nerešen problem, ali ima vsak prizmatoid mrežo. Prizmatoid je konveksna ogrinjača dveh konveksnih poligonov, ki ležita v vzporednih ravninah. Vsebina se nato nadaljuje z ortogonalnimi poliedri, posebno s tistimi, ki imajo pravokotno osnovno ploskev, in mrežami takih poliedrov. Konča pa se s prepogibanjem poligonov v konveksne poliedre.

Knjiga je lepo oblikovana. Ima svoje definicije, leme, izreke, posledice, dokaze, primere, še nerešene probleme, naloge z rezultati in številne slike. Na koncu so zbrani tudi osnovni pojmi in njihova razlaga, ne manjkata pa niti stvarno kazalo in dodatna literatura za študij. Morda bo delo koga vzpodbudilo k raziskovanju navedenih problemov.

Joseph O'Rourke je profesor računalništva in matematike na kolidžu Smith v Massachusettsu. Njegovo glavno raziskovalno področje je računalniška geometrija. Bil je prvi, ki je objavil algoritem, s katerim dani množici točk v trirazsežnem prostoru določimo minimalni kvader, ki to množico vsebuje. Je avtor ali soavtor več del na področju računalniške geometrije in diskretne matematike.

Marko Razpet

MARS 2012

Od petka do petka med 17. in 24. avgustom letos je potekal že sedmi tabor za srednješolce MARS (matematično raziskovalno srečanje srednješolcev Slovenije). Marsovci smo se zbrali ob Kolpi, natančneje v Centru šolskih in obšolskih dejavnosti Fara v občini Kostel. Odpravo smo vodili dr. Boštjan Kuzman, PeF UL, Matej Aleksandrov, Maja Alif, Nino Bašić, David Gajser, Nejc Rosenstein, Jaka Špeh in Jana Vidrih, FMF UL, ter Matej Roškarič, FNM UM. V drugi polovici tabora se je posadki pridružil še Dejan Širaj, doktorski študent matematike na Univerzi v Warwicku. Za dijake, letos jih je bilo štiriindvajset, smo pripravili osem matematičnih tem, ki so jih raziskovali v skupinah po tri – vsaka skupina svojo temo. Vsak dan so po nekaj ur namenili delu pri svojem projektu. To delo je poleg reševanja matematičnih problemov vključevalo tudi pisanje krajšega sestavka, izdelavo morebitne računalniške aplikacije in pripravo predstavitve projekta. Slednja je bila izvedena na zaključnem dogodku tabora – pristanku, na katerega so bili vabljeni tudi starši in učitelji udeležencev. Več informacij o projektih, vključno z računalniškimi aplikacijami in sestavki, najdete na spletni strani `http://mars.famnit.upr.si/projekti.html`.

Prve štiri dni je bil z nami na MARS-u dr. Jernej Tonejc, FMF UL, ki je pripravil izvrstno malo šolo kriptografije. Na štirih dvournih predavanjih nas je seznanil z zgodovino, pomenom in uporabo matematike šifriranja. Ob

sprehodu skozi zgodovino pošiljanja skrivnih sporočil smo spoznali klasične metode, ki so jih pošiljatelji in prejemniki uporabljali, da so si lahko prikrito dopisovali. Med bolj znanimi sta Vigenérjeva šifra, ki so ji dolgo pravili tudi *le chiffre indéchiffrable* (iz fr. nezlomljiva šifra) in Enigma, uporabljana na nemški strani med drugo svetovno vojno. Spoznali smo, kako lahko zviti matematiki razvozlajo prešibko zašifrirano sporočilo, in utemeljili, da *le chiffre indéchiffrable* ni najbolj posrečen naziv za Vigenérjevo šifro. Kot primer dobre oblike šifriranja smo si pogledali RSA algoritem in videli, da tudi pri takem šifriranju obstajajo načini, kako priti do zašifriranih podatkov, četudi za to nismo „pooblaščeni“.

Večere smo imeli rezervirane za gostujoče predavatelje, ki so se letos še posebej trudili približati se srednješolcem. Ti so jih z zanimanjem poslušali in večkrat kaj povprašali. Prvi je pred mladino stopil dr. Matjaž Konvalinka, FMF UL, ki je razložil osnove rodovnih funkcij. Spoznali smo, da je zapis zaporedja z rodovno funkcijo lahko elegantnejši od eksplicitnega zapisa. Sledilo je predavanje dr. Gašperja Jakliča, FMF UL, ki je razložil, kako nam lahko numerika pomaga pri izračunu optimalne poti na vrh gore. Za primer je vzel Šmarno goro, pri kateri je izračunane optimalne poti primerjal z že obstoječimi. Zadnja tri predavanja so bila zelo povezana z računalništvom. Kako Google ocenjuje pomembnost spletnih strani, nam je pojasnila dr. Helena Šmigoc, School of Mathematical Sciences, University College Dublin, možgane in računalnike je primerjal dr. Barak A. Pearlmutter, Hamilton Institute, National University of Ireland Maynooth, analizo prijateljev in sovražnikov v socialnih omrežjih (kot je npr. Facebook) pa smo izvedli z dr. Juretom Leskovcem, Stanford University. Slednji nam je svetoval, da moramo starejšim, uveljavljenim matematikom neutrudno težiti, naj nam pomagajo. To naj bi njega pripeljalo zelo daleč.

Med strokovnim delom programa MARS 2012 omenimo še dvourni delavnici LaTeX in Python, ki ju je vodil Nino Bašić. Na prvi je predstavil osnove rokovanja z najpopularnejšim matematičnim urejevalnikom besedil, kar so dijaki s pridom uporabili pri pripravi članka. Na drugi pa je predstavil osnove programiranja v Pythonu, tako da so udeleženci lahko razumeli programčke, ki jih je za svoja predavanja pripravil dr. Tonejc. Znanje programiranja so uporabile tudi nekatere skupine pri svojem projektu.

Kljub napornemu urniku je bilo ozračje na taboru izjemno. V prostem času so se igrale razne družabne igre, začenši z Mafijo in Naseljenci otoka Catan, bil je čas za sprehode, kopanje v Kolpi, igranje košarke, pingponga … Posebnost letošnjega tabora je bila jutranja telovadba z matematičnimi zgodbicami. Tako so udeleženci nekaj minut med jutranjim razgibavanjem poslušali o temah: Abelova nagrada, Millenium prize problems, Tycho Brahe, Alan Turing in Wolfgang Doeblin. Vsak dan je bil objavljen tudi problem dneva, s katerim smo si krajšali proste urice tako posadka kot udeleženci. Podali smo se tudi na daljši pohod do večjega tolmuna, kjer smo se kopali, zadnje popoldne pa je bila pripravljena velika MARS-ovska avantura. Na njej je sodelovalo osem letošnjih ekip ter tri ekipe povabljencev. Šlo je za orientacijski pohod s šestimi kontrolnimi točkami, na katerih so ekipe reševale različne matematične in praktične probleme. Med najzanimivejšimi problemi je bil naslednji:

Natanko s štirimi štiricami sestavi vsa števila od 1 *do* 20*. Uporabljaš lahko seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje, kvadratno korenjenje, fakultete in oklepaje. Imaš pet minut časa.*

Zvečer so nam sodelujoči udeleženci olimpijad iz fizike, kemije, lingvistike in matematike pripravili predstavitve teh velikih tekmovanj, na katera so se letos uvrstili. Sledila je razglasitev rezultatov avanture in piknik ob žaru, kjer se je oglasila tudi kitara. MARS 2012 so finančno podprli Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo RS, ŠOU v Ljubljani ter DMFA Slovenije. Tabor so zaznali tudi mediji, več informacij o tem na `http://mars.famnit.upr.si/index.html`.

David Gajser

PROF. IVANA MULEC (1939–2011)

Ivana Mulec se je po maturi leta 1958 odločila za študij matematike in fizike na tedanji Naravoslovni fakulteti Univerze v Ljubljani. Bila je ena od treh, ki so iz tiste generacije napredovali v drugi letnik. Njeno prvo delovno mesto je bila ljubljanska Gimnazija Poljane, kjer je poučevala matematiko in fiziko skoraj dve desetletji. Nato je navdušeno sprejela mesto pedagoške svetovalke za matematiko na Zavodu za šolstvo, a ga je, ker je bilo delo bolj politične kot strokovne narave, zapustila še pred iztekom prvega mandata. Do upokojitve leta 1998 je nato poučevala matematiko na Srednji železničarski šoli v Ljubljani. Ves čas je pomagala tudi pri usposabljanju študentov pedagoške matematike, saj jim je omogočala hospitacije in nastope v svojih razredih.

Profesorica Mulčeva je soavtorica več matematičnih učbenikov za razredno stopnjo osnovne šole in avtorica pripadajočih priročnikov za učitelje. Aktivno je delovala tudi v DMFA Slovenije. V sedemdesetih letih je bila blagajničarka društva in od 1993. do 1997. leta vodja Komisije za pedagoško dejavnost, v okviru katere je skrbela za izobraževalne seminarje za učitelje matematike. Za svoje delo je leta 1998 prejela društveno priznanje. Ponosni smo, da smo jo poznali. Pogrešali jo bomo.

Marija Vencelj

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 2012
Letnik 59, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Slika na naslovnici: Volframska žica v navadni žarnici je navita v dvojno spiralo. To izboljša izkoristek in življenjsko dobo žarnice. Na spodnjem delu slike je precej debelejša dovodna žica. Dovodna žica ne žari, ko skoznjo teče električni tok, saj je njen upor zanemarljiv v primerjavi z uporom tanke žice. Slika je narejena s 35-kratno povečavo.