IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2015
Letnik 62
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

MEDNARODNO LETO SVETLOBE 2015

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2015, letnik 62, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

ARHITOVA KRIVULJA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A20, 14H50, 53A04, 53A05

V prispevku je predstavljena Arhitova krivulja. Navadno jo omenjamo v zvezi z antičnim problemom podvojitve kocke. Nastane kot presek rogatega torusa in krožnega valja, ki se torusa dotika v dveh točkah.

THE ARCHYTAS CURVE

In this contribution the Archytas curve is presented. It is usually mentioned in connection with the ancient problem of doubling the cube. It is created as the intersection of a horn torus and a circular cylinder which touches the torus at two points.

Uvod

Arhitova krivulja $\mathcal{A}$ je za matematiko in njeno zgodovino dovolj zanimiva, ker ni povezana le s problemom podvojitve kocke, ampak že sama po sebi ponuja nekaj novih izzivov. Spoznali bomo, da je $\mathcal{A}$ presek rogatega torusa z valjem, ki se torusa dotika natanko v dveh točkah. Zapisali bomo ustrezne enačbe v primernem pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$, pa tudi pravokotne projekcije krivulje $\mathcal{A}$ na koordinatne ravnine, pri čemer bomo našli celo zlato razmerje τ. Za krivuljo $\mathcal{A}$ bomo poiskali tudi regularno parametrizacijo.

Starogrški matematik, mehanik, državnik in strateg Arhitas iz Tarenta (Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος, 428–347 pr. n. št.) je bil pitagorejec. Po [1] naj bi sklanjali Arhitas, Arhita, Arhitu, ..., ustrezni svojilni zaimek pa zapisali kot Arhitov. Znan je tudi po tem, da je otel iz rok sirakuškega tirana Dionizija Mlajšega (396–337 pr. n. št.) samega filozofa Platona (427–347 pr. n. št.). Platon se je namreč, razočaran nad atensko demokracijo, ki je bila na smrt obsodila njegovega učitelja Sokrata (470–399 pr. n. št.), za dlje časa umaknil iz Aten, precej potoval in se srečal z matematikoma Teodorjem iz Kirene ter Arhitom iz Tarenta. V Sirakuzah je poskusil udejanjiti svoje zamisli o idealni državi. Toda s tiranom se je tako hudo sporekel, da ga je moral reševati Arhitas. Leta 387 pr. n. št. je Platon v Akademovem gaju blizu Aten ustanovil znamenito Akademijo, v kateri so študirali tudi znani antični matematiki, geometri in astronomi: Teajtet (417–369 pr. n. št.), Evdoks iz Knida (410–347 pr. n. št.), tudi Arhitov učenec, brata Dejnostrat (390–320 pr. n. št.) in Menajhmos (380–320 pr. n. št.) ter Avtolik iz Pitane

(360–290 pr. n. št.). V Platonovi Akademiji je seveda beseda nanesla tudi na velike geometrijske probleme (več o tem na primer v [3–5]). Platon je vztrajal, da je treba geometrijske probleme reševati samo s šestilom in neoznačenim ravnilom, in to v ravnini. Problem podvojitve kocke, to se pravi konstrukcije roba b kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot kocka z robom a, je na problem vmesnega sorazmerja prevedel Hipokrat s Hiosa (470–410 pr. n. št.). Njegova ideja je bila, dani daljici dolžine a najti daljici dolžin b in c, za kateri velja relacija:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{2a}. \tag{1}$$

Iz nje namreč dobimo najprej

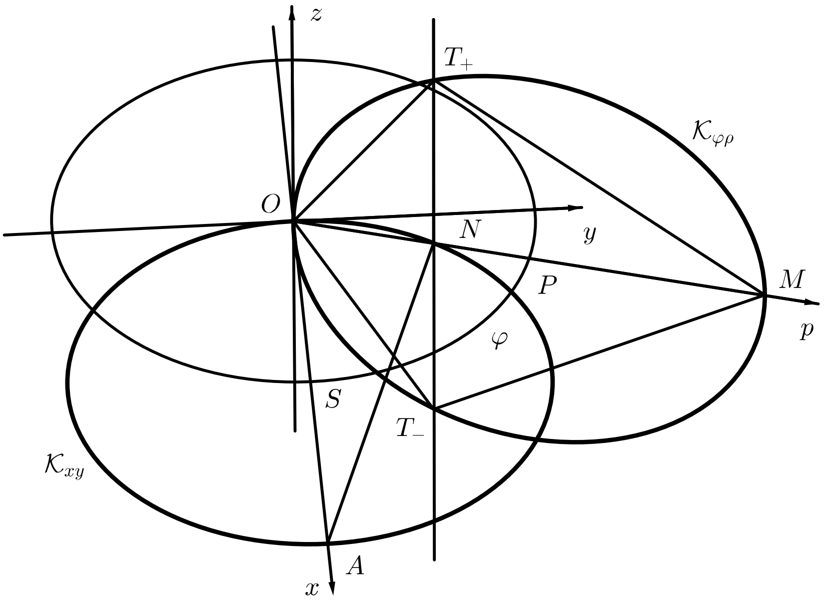
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{2a} = \frac{1}{2},$$

nato pa $b = a\sqrt[3]{2}$ in $c = a\sqrt[3]{4}$. Problem je enakovreden iskanju kratkega geometrijskega zaporedja $a, b, c, 2a$.

Ker veljata relaciji $b^2 = ac$ in $c^2 = 2ab$, lahko tudi rečemo, da je par $(x, y) = (b, c)$ neničelna rešitev sistema enačb $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, to se pravi netrivialno presečišče dveh parabol. Ker je tudi $bc = 2a^2$, je par $(x, y) = (b, c)$ tudi rešitev sistemov enačb $x^2 = ay$, $xy = 2a^2$ in $y^2 = 2ax, xy = 2a^2$, kar pomeni presečišče hiperbole $xy = 2a^2$ z eno od omenjenih parabol. Tako je Menajhmos s stožnicami reševal problem podvojitve kocke. Starogrški matematiki so našli še druge načine reševanja problema podvojitve kocke (več na primer v [3, 5]). Platon seveda ni bil z nobeno zadovoljen. Žal ni vedel, da je problem nerešljiv na način, ki si ga je zamislil. To so dokazali šele v 19. stoletju.

Nastanek Arhitove krivulje

Arhitas iz Tarenta je bil prvi, ki je v geometrijo vpeljal gibanje. Problema podvojitve kocke se je lotil na povsem svojstven način, s prehodom iz ravnine v prostor. Da bi mu laže sledili, bomo vse obravnavali v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$ (slika 1), čeprav je Arhitas nalogo reševal brez koordinatnega sistema, ki ga ni poznal. V ravnino Oxy položimo krožnico $\mathcal{K}_{xy}$ s polmerom a, njeno središče pa v točko $S(a, 0)$. Koordinatnemu izhodišču diametralno nasprotna točka na $\mathcal{K}_{xy}$ je $A(2a, 0)$. Na $\mathcal{K}_{xy}$ izberemo točko $N(x, y)$, konstruiramo poltrak p od koordinatnega izhodišča O skozi N in krožnico $\mathcal{K}_{\varphi\rho}$ s polmerom a skozi O, s središčem P na p, in sicer v ravnini, ki vsebuje os Oz. Koordinatnemu izhodišču diametralno nasprotno točko na $\mathcal{K}_{\varphi\rho}$ označimo z M. Pravokotnica skozi N na ravnino Oxy seka to krožnico v točkah T_+ in T_-.



Slika 1. Nastanek Arhitove krivulje.

Ko točko N vodimo po krožnici $\mathcal{K}_{xy}$, točki $T_\pm(x, y, \pm z)$ opišeta krivuljo, ki ji pravimo *Arhitova krivulja* in jo bomo označevali z $\mathcal{A}$, njene pravokotne projekcije na koordinatne ravnine Oxy, Oyz, Oxz pa ustrezno $\mathcal{A}_{xy}$, $\mathcal{A}_{yz}$, $\mathcal{A}_{xz}$.

Poltrak p naj z osjo Ox oklepa kot φ, polarni kot točke N. Polarni radij točke N je $\rho = |ON| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pri tem je $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Ker je trikotnik OAN pravokoten, lahko takoj zapišemo enačbo krožnice $\mathcal{K}_{xy}$ v polarnih koordinatah z $\rho = 2a\cos\varphi$, v pravokotnih koordinatah z $x^2 + y^2 = 2ax$, v parametrični obliki pa kot

$$x = 2a\cos^2\varphi,\ y = 2a\cos\varphi\sin\varphi. \tag{2}$$

Ker sta tudi trikotnika $OMT_\pm$ pravokotna, dobimo po višinskem izreku zanju relacijo $z_\pm^2 = \rho(2a - \rho) = 4a^2\cos\varphi(1 - \cos\varphi)$. S tem smo našli parametrične enačbe Arhitove krivulje $\mathcal{A}$:

$$x = 2a\cos^2\varphi,\ y = 2a\cos\varphi\sin\varphi,\ z = \pm 2a\sqrt{\cos\varphi(1 - \cos\varphi)}. \tag{3}$$

Ker je za računanje ugodno, da v parametrizaciji krivulje nastopata funkciji sin in cos racionalno, ne pa pod korenskim znakom, bomo v nadaljevanju poiskali boljšo parametrizacijo.

Očitno krivulja $\mathcal{A}$ leži hkrati na valju $\mathcal{V}$, ki ima v koordinatnem sistemu $Oxyz$ enačbo $x^2 + y^2 = 2ax$, in na torusu $\mathcal{T}$, ki nastane z rotacijo krožnice

$\mathcal{K}_{\varphi\rho}$ okoli osi Oz, ki je tangenta na to krožnico. Torus nima odprtine, zaradi značilne oblike v okolici njegovega središča mu pravimo *rogati torus*.

Iz parametričnih enačb (3) dobimo najprej $x^2 + y^2 = 4a^2 \cos^2 \varphi, z^2 = 4a^2 \cos\varphi(1-\cos\varphi)$, nato še $x^2+y^2+z^2 = 4a^2\cos^2\varphi+4a^2\cos\varphi(1-\cos\varphi) = 4a^2\cos\varphi$, nazadnje pa enačbo torusa $\mathcal{T}$:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \tag{4}$$

Arhitova krivulja je potemtakem presek torusa $(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$ in valja $x^2 + y^2 = 2ax$. Arhitas je problem podvojitve kocke v bistvu rešil tako, da je svojo krivuljo $\mathcal{A}$ presekal s krožnim stožcem $\mathcal{S}$, ki ima vrh v središču torusa $\mathcal{T}$ in os skozi zunanje dotikališče valja $\mathcal{V}$ in torusa $\mathcal{T}$, to je točko A. Kot ob vrhu stožca $\mathcal{S}$ je treba še pravilno izbrati. Enačbo stožca $\mathcal{S}$ zapišimo kot $\lambda x = \sqrt{y^2 + z^2}$, kjer je λ pozitivna konstanta. Presek Arhitove krivulje s stožcem $\lambda x = \sqrt{y^2 + z^2}$ pa nam ob primerni izbiri faktorja λ da daljice, ki so uporabne za podvojitev kocke. V jeziku algebre to pomeni, da rešujemo sistem enačb:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = 2ax,\ \lambda x = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Brez težav izločimo y in z in dobimo enačbo $x^4(1 + \lambda^2)^2 = 8a^3x$, ki ima trivialno rešitev $x_0 = 0$ in netrivialno rešitev $x_1 = 2a/\sqrt[3]{(1 + \lambda^2)^2}$.

Arhitovo krivuljo $\mathcal{A}$ preseka stožec $\mathcal{S}$ v štirih točkah, ki imajo absciso x_1, njihove ordinate pa dobimo iz enačbe valja $\mathcal{V}$. Projekcije (vse projekcije v prispevku so pravokotne) teh točk na ravnino Oxy imajo tudi abscise x_1, za polarni radij pa $\rho_1 = \sqrt{2ax_1} = 2a/\sqrt[3]{1 + \lambda^2}$. Za $\lambda = 1$ je $x_1 = b = a\sqrt[3]{2}$, za $\lambda = \sqrt{3}$ pa je $\rho_1 = b = a\sqrt[3]{2}$. V prvem primeru je kot ob vrhu stožca 90°, v drugem pa 120°. V obeh pa s tem rešimo problem podvojitve kocke.

Iz zgodovinskih virov, žal tudi ne iz [3], ne razberemo, kaj je Arhita vodilo, da se je lotil na opisani način reševati problem podvojitve kocke. Poudarjajo pa njegovo genialnost. Da pa je njegov način tesno povezan z relacijo (1), lahko preberemo ravno v [3] ali pa v [4].

Projekcije na koordinatne ravnine in regularna parametrizacija

Projekcijo $\mathcal{A}_{xy} = \mathcal{K}_{xy}$ lahko včrtamo v kvadrat s stranico dolžine $2a$ z oglišči $(0, \pm a)$, $(2a, \pm a)$ in dotikališči $(0, 0)$, $(2a, 0)$, $(a, \pm a)$ v ravnini Oxy. Izkaže se, da tudi drugi dve projekciji lahko včrtamo v prav tako velik kvadrat.

Z izločitvijo koordinate y iz enačb torusa in valja dobimo projekcijo $\mathcal{A}_{xz}$ krivulje $\mathcal{A}$ na ravnino Oxz v implicitni obliki:

$$(2ax + z^2)^2 = 8a^3x.$$

Zelo lep izraz dobimo za ploščino S lika, ki ga omejuje (slika 2):

$$S = 2\int_0^{2a} z(x)\,dx = 2\sqrt{2a}\int_0^{2a}\sqrt{\sqrt{2ax}-x}\,dx.$$

S substitucijo $x = 2au^2$ se nam izraz poenostavi:

$$S = 16a^2\int_0^1 u\sqrt{u-u^2}\,du = 16a^2\int_0^1 u^{3/2}(1-u)^{1/2}\,du.$$

Z uporabo funkcij $\mathbf{B}$ in $\mathbf{\Gamma}$ takoj dobimo:

$$S = 16a^2\mathbf{B}(5/2,3/2) = 16a^2\frac{\mathbf{\Gamma}(5/2)\mathbf{\Gamma}(3/2)}{\mathbf{\Gamma}(4)} = \pi a^2.$$

To je ravno ploščina kroga, ki ga omejuje $\mathcal{K}_{xy}$.

Če bi v prejšnjem integralu postavili $u = \cos^2 t$, bi se nam integral tudi poenostavil tako, da v njem ne bi bilo korenov. To pa pomeni, da bi bilo smiselno krivuljo $\mathcal{A}_{xz}$ parametrizirati z $x = 2au^2 = 2a\cos^4 t$. Potem zlahka dobimo še $z = a\sin 2t$. En obhod po krivulji dobimo, če vzamemo $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. Preprosta parametrizacija krivulje $\mathcal{A}_{xz}$ v ravnini Oxz je torej

$$x = 2a\cos^4 t,\ z = a\sin 2t,\ -\pi/2 \le t \le \pi/2.$$

Brez zapletov lahko izračunamo presečišča te krivulje s krožnico $x^2+z^2 = 2ax$. V ta namen rešimo naslednji sistem enačb:

$$(2ax + z^2)^2 = 8a^3x,\ x^2 + z^2 = 2ax.$$

Izločimo z in dobimo enačbo $(4ax - x^2)^2 = 8a^3x$, ki jo poenostavimo v

$$x^4 - 8ax^3 + 16a^2x^2 - 8a^3x = x(x-2a)(x^2 - 6ax + 4a^2) = 0.$$

Enačba ima 4 rešitve:

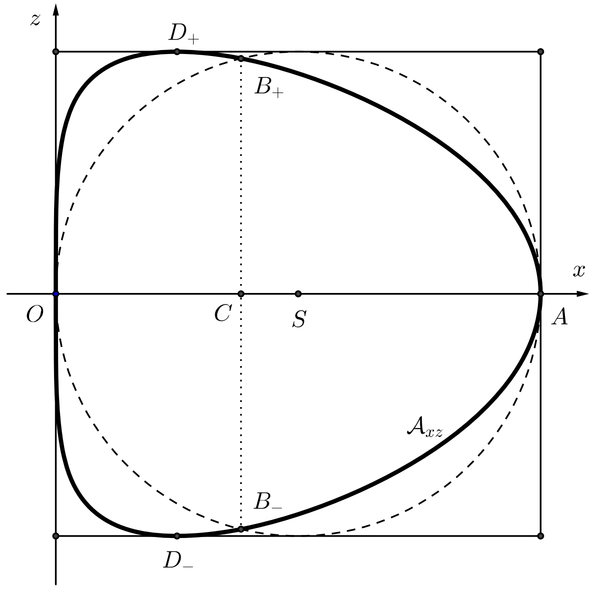
$$x_1 = 0,\ x_2 = 2a,\ x_3 = (3-\sqrt{5})a,\ x_4 = (3+\sqrt{5})a.$$

Rešitev $x_4 > 2a$ ne pride v poštev. Skupne točke obeh krivulj v ravnini Oxz so torej:

$$O(0,0),\ A(2a,0),\ B_\pm\left(a(3-\sqrt{5}), \pm 2a\sqrt{\sqrt{5}-2}\right).$$

Projekcija točk $B_\pm$ na os Ox je točka $C((3-\sqrt{5})a, 0)$, ki deli daljico OA v zlatem razmerju. Velja namreč:

$$\frac{|OA|}{|CA|} = \frac{|CA|}{|OC|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau.$$



Slika 2. Projekcija Arhitove krivulje na ravnino Oxz.

O tem se hitro prepričamo, če upoštevamo izraze:

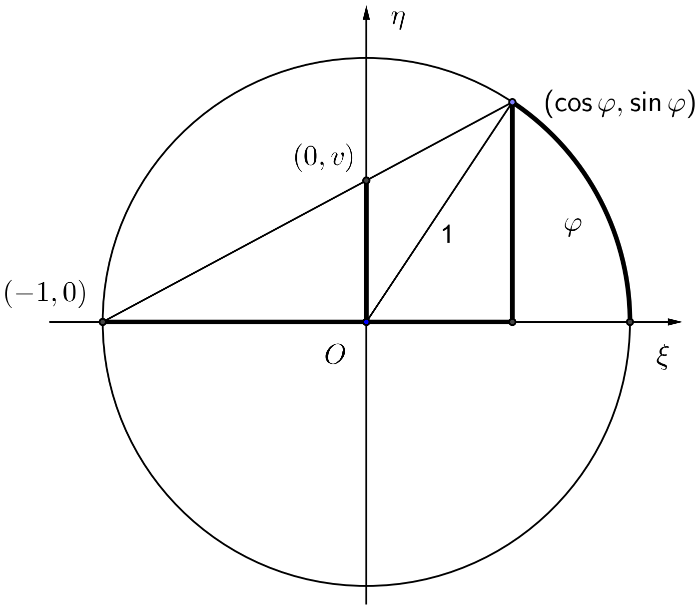
$$|OA| = 2a,\ |CA| = a(\sqrt{5} - 1),\ |OC| = a(3 - \sqrt{5}).$$

Izraz *zlato razmerje* je v resnici precej nov, čeprav so sam pojem že uporabljali v antiki, na primer Evklid v svojih Elementih, kjer na več mestih namesto besed *zlato razmerje* najdemo ἄκρος καὶ μέσος λόγος, kar pomeni, če pogledamo v [2], *skrajno in srednje razmerje*. Luca Pacioli (1445–1517) je to razmerje imenoval *divina proportione*, *božansko razmerje*. Med prvimi, ki so uporabljali izraz *zlato razmerje*, v nemščini *goldene Proportion*, je bil nemški matematik Martin Ohm (1792–1872), brat fizika Georga Ohma (1789–1854), po katerem se imenujeta Ohmov zakon in enota ohm (Ω) za električno upornost. Zlato razmerje τ ima preprost razvoj v verižni ulomek: $\tau = [1; 1, 1, 1, \ldots]$. Dobimo ga iz relacije $\tau = 1 + 1/\tau$.

Krivuljo $\mathcal{A}_{xz}$ lahko včrtamo v kvadrat s stranico dolžine $2a$ z oglišči $(0, \pm a)$, $(2a, \pm a)$, dotikališča pa so v točkah $O(0, 0)$, $A(2a, 0)$, $D_\pm(a/2, \pm a)$ v ravnini Oxz.

Žal pa se z zadnjo parametrizacijo krivulje $\mathcal{A}_{xz}$ ne da parametrizirati same krivulje $\mathcal{A}$ v obliki, ki ne bi vsebovala korenov funkcij. Izraza za y se ne da poenostaviti v racionalno obliko, ki bi vsebovala le funkciji cos in sin. Zato se parametrizacije lotimo nekoliko drugače.

Krožnico $x^2 + y^2 = 2ax$ v ravnini Oxy smo z (2) že parametrizirali s polarnimi koordinatami φ in ρ. Razmere predstavimo v pomožnem pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $O\xi\eta$ na desni polovici enotske krožnice (slika 3).



Slika 3. Enotska krožnica v koordinatnem sistemu $O\xi\eta$.

Točko $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ povežemo s točko $(-1, 0)$ z daljico, ki seka os $O\eta$ v točki $(0, v)$. Očitno daljica oklepa z osjo $O\xi$ kot $\varphi/2$. Ordinata $v = \tan(\varphi/2)$ pa je s kotom $\varphi \neq \pm\pi$ natančno določena. Znani enakosti

$$\cos\varphi = \frac{1 - \tan^2(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)},\ \sin\varphi = \frac{2\tan(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)},$$

ki ju srečamo pri integraciji funkcij, ki se racionalno izražajo s $\cos\varphi$ in $\sin\varphi$, nam dasta izraza

$$\cos\varphi = \frac{1 - v^2}{1 + v^2},\ \sin\varphi = \frac{2v}{1 + v^2}.$$

Vemo, da pri krožnici $x^2 + y^2 = 2ax$ velja omejitev $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, kar prinese omejitev $-1 \leq v \leq 1$. Zato lahko enolično zapišemo $v = \sin t$ za $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ in dobimo

$$\cos\varphi = \frac{\cos^2 t}{1 + \sin^2 t},\ \sin\varphi = \frac{2\sin t}{1 + \sin^2 t},\ 1 - \cos\varphi = \frac{2\sin^2 t}{1 + \sin^2 t}.$$

S tem imamo naslednjo parametrizacijo krožnice $x^2 + y^2 = 2ax$:

$$x = \frac{2a\cos^4 t}{(1+\sin^2 t)^2},\ y = \frac{2a\cos t\sin 2t}{(1+\sin^2 t)^2},\ -\pi/2 \le t \le \pi/2.$$

Hitro se vidi, da lahko iz tretje relacije v (3) izrazimo

$$z^2 = 4a^2\cos\varphi(1-\cos\varphi) = \frac{8a^2\cos^2 t\sin^2 t}{(1+\sin^2 t)^2} = \frac{2a^2\sin^2 2t}{(1+\sin^2 t)^2}.$$

S tem smo našli:

$$z = \pm\frac{a\sqrt{2}\sin 2t}{1+\sin^2 t}.$$

Ker velja $x(\pi - t) = x(t), y(\pi - t) = y(t)$ in $z(\pi - t) = -z(t)$, se odločitvi pri izboru predznaka za $z(t)$ izognemo tako, da namesto intervala parametrizacije $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ vzamemo interval $-\pi \le t \le \pi$. Potem y in z štirikrat zavzameta vse vrednosti od $-a$ do a ter x štirikrat vse vrednosti od 0 do $2a$, kar je v skladu z definicijo Arhitove krivulje kot preseka torusa in valja. Krivulja $\mathcal{A}$ v vektorski parametrični obliki je

$$\vec{r}\,(t) = a\left(\frac{2\cos^4 t}{(1+\sin^2 t)^2}, \frac{2\cos t\sin 2t}{(1+\sin^2 t)^2}, \frac{\sqrt{2}\sin 2t}{1+\sin^2 t}\right),\ -\pi \le t \le \pi. \tag{5}$$

Pri spreminjanju parametra t po intervalu $[-\pi, \pi]$ točka, ki je izražena z zgornjim krajevnim vektorjem, doseže vsako točko krivulje $\mathcal{A}$ natančno enkrat, razen samopresečišča $A(2a, 0, 0)$ za $t = 0$ in $t = \pm\pi$ ter samodotikališča $O(0, 0, 0)$ za $t = \pm\pi/2$. Izkaže se, da je $|\dot{\vec{r}}\,(t)| > 0$ za vsak t, kar pomeni, da je po [9] $\mathcal{A}$ regularna sklenjena krivulja (slika 4).

Krivulja $\mathcal{A}_{yz}$, projekcija krivulje $\mathcal{A}$ na ravnino Oyz, ima enačbo:

$$(z^4 + 4a^2y^2)^2 = 8a^2z^2(4a^2y^2 - z^4).$$

Do te enačbe lahko pridemo z izločitvijo spremenljivke x iz enačb

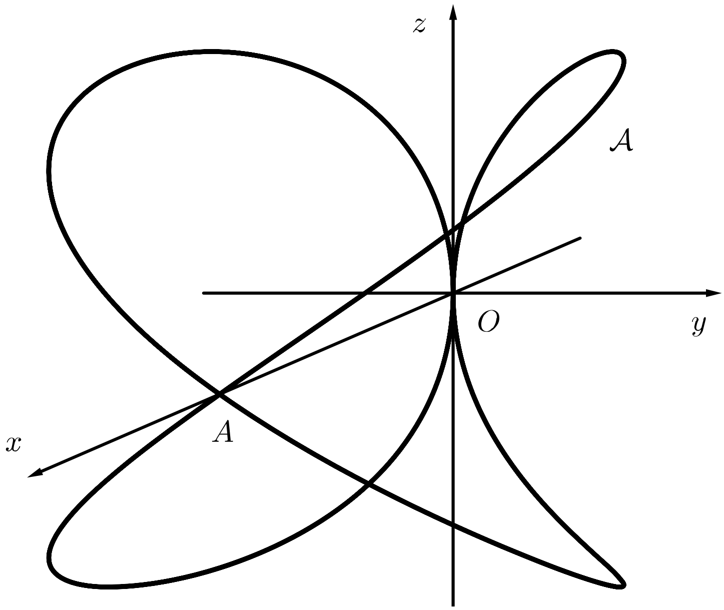
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = 2ax,$$

če ne gre drugače, z rezultanto $R[p(x), q(x)]$ polinomov (več o rezultanti polinomov najdemo na primer v [8])

$$p(x) = x^4 + 2(y^2 + z^2 - 2a^2)x^2 + (y^2 + z^2)^2 - 4a^2y^2,\ q(x) = x^2 - 2ax + y^2$$

spremenljivke x, pri čemer sta y in z parametra:

$$R[p(x), q(x)] =$$



Slika 4. Arhitova krivulja.

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2(y^2+z^2-2a^2) & 0 & (y^2+z^2)^2-4a^2y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2(y^2+z^2-2a^2) & 0 & (y^2+z^2)^2-4a^2y^2 \\ 1 & -2a & y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2a & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2a & y^2 \end{array}\right|.$$

Primerno računalniško orodje za delo z matrikami in determinantami nam izraz poenostavi:

$$R[p(x), q(x)] = 16a^4y^4 + 8a^2y^2z^2(z^2-4a^2) + z^6(z^2+8a^2).$$

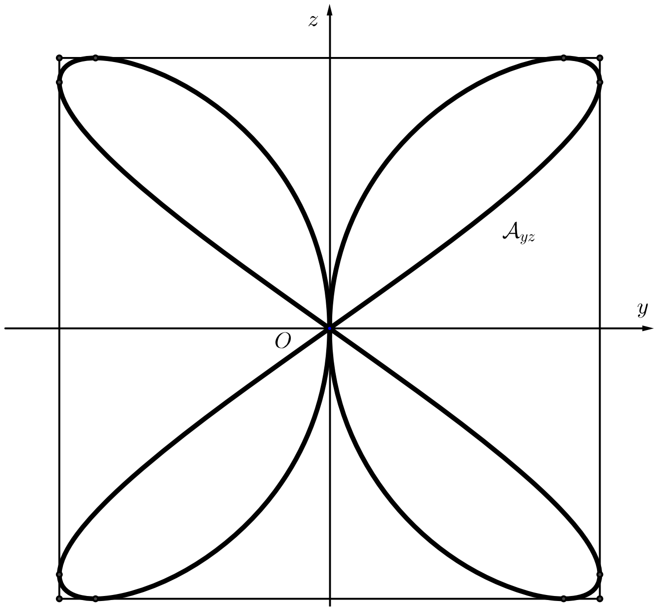
Po preureditvi členov imamo enačbo iskane krivulje v ravnini Oyz:

$$R[p(x), q(x)] = (z^4 + 4a^2y^2)^2 - 8a^2z^2(4a^2y^2 - z^4) = 0.$$

Če v tej enačbi za majhne y in z zanemarimo člene stopnje 6 ali več, dobimo: $y^2(y^2 - 2z^2) = 0$. To pomeni, da se krivulja $\mathcal{A}$ dotika sama sebe v točki $(0,0,0)$, njena tangenta pa je tam os torusa, v točki $A(2a,0,0)$ pa samo sebe seka pod kotom $2\arctan(\sqrt{2}/2)$.

Krivulja $\mathcal{A}_{yz}$ v parametrični obliki je

$$y = \frac{2a\cos t\sin 2t}{(1+\sin^2 t)^2},\ z = \frac{a\sqrt{2}\sin 2t}{1+\sin^2 t},\ -\pi \le t \le \pi.$$



Slika 5. Projekcija Arhitove krivulje na ravnino Oyz.

Ima obliko rahlo popačene štiriperesne deteljice. Ploščino S lika, ki ga omejuje, se da izračunati po formuli:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (y\dot{z} - z\dot{y}) dt = 16a^2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t \cos^2 t (2 + \cos^2 t)\, dt}{(1 + \sin^2 t)^4}.$$

Po daljšem računu dobimo:

$$S = 4a^2 \left(\ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

V izrazu opazimo *srebrno razmerje* $\varrho = 1 + \sqrt{2}$, za katero je $\varrho = 2 + 1/\varrho$, razvoj v verižni ulomek pa je, prav tako kot za zlato razmerje, preprost: $\varrho = [2; 2, 2, 2, \ldots]$. Krivuljo $\mathcal{A}_{yz}$ lahko včrtamo v kvadrat s stranico dolžine $2a$ z oglišči $(\pm a, \pm a)$, dotikališča pa so v točkah $\left(\pm a, \pm a\sqrt{2\sqrt{2} - 2}\right)$, $(\pm a\sqrt{3}/2, \pm a)$ v ravnini Oyz (slika 5). Celotna Arhitova krivulja $\mathcal{A}$ je zaprta v kocki z robom $2a$ in oglišči $(0, \pm a, \pm a), (2a, \pm a, \pm a)$.

Za konec

V zvezi z Arhitovo krivuljo bi lahko rešili še kakšno nalogo. Če prerežemo valj vzdolž osi Oz in ga nato z Arhitovo krivuljo vred razgrnemo v ravnino $x = 2a$, dobimo v njej osmici podobno krivuljo, za katero se da lepo izračunati ploščino S lika, ki ga omejuje: $S = 16a^2(\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$.

Lepo se da z uporabo GeoGebre 5 predstaviti Arhitovo krivuljo v prostoru, jo sukati in opazovati njeno *anaglifno sliko*. Pojasnimo na kratko, za kaj pri slednji sploh gre.

Potrebe po izdelavi dobrih načrtov objektov, kot so na primer stroji, zgradbe in prometnice, so prispevale k razvoju *opisne geometrije*. Med prvimi jo je študiral in uvedel v šole Gaspard Monge (1746–1818), Napoleonov general [5, 7]. Kmalu so spoznali način, kako prevarati človeške oči, da bi videle prostorsko. Eden od načinov je ravno omenjena anaglifna slika, ki jo sestavljata skoraj identični, malo razmaknjeni ravninski sliki, ki sta običajno obarvani, ena rdečkasto, druga zelenkasto, in narisani na isti ravnini, gledani skozi rdeče-zelena očala pa se v naših možganih ustvari vtis prave prostorske slike. Gledati pa je treba hkrati z obema očesoma, kajti ravno razdalja med njima omogoča, da anaglifno sliko vidimo prostorsko.

Prvo metodo za izdelavo anaglifnih slik je že leta 1852 razvil Wilhelm Rollmann (1821–1890) iz Leipziga. Sama beseda *anaglifen* izvira iz grških besed ἀνά, kar pomeni *na, drug na drugega*, in γλύφω, *dolbem, graviram, predstavljam*. Sorodna beseda je *hieroglif*, pri kateri prvi del izhaja iz grške besede ἱερός, kar pomeni *sveti, božanski*.

Eden od redkih učbenikov o anaglifnih slikah, ki ga dobimo pri nas, je v hrvaščino prevedena knjiga [6], ki jo je napisal v madžarščini Imre Pál (rojen 1911) že davnega leta 1959 in je bila prevedena v več jezikov. Izvirni naslov je *Térláttatós ábrázoló mértan*, kar pomeni *Opisna geometrija z anaglifnimi slikami*.

LITERATURA

[1] B. Aubelj, *Antična imena po slovensko*, Modrijan, Ljubljana, 1997.
[2] A. Dokler, *Grško-slovenski slovar*, Knezoškofijski zavod sv. Stanislava, Ljubljana, 1915.
[3] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, Vol. I. Dover Publ., New York, 1981.
[4] M. Jerman, *Reševanje treh velikih starogrških problemov*, Obzornik mat. fiz. **59** (2012), 182–192.
[5] U. C. Merzbach in C. B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2011.
[6] I. Pál, *Nacrtna geometrija u anaglifskim slikama*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1966.
[7] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1986.
[8] I. Vidav, *Algebra*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010.
[9] I. Vidav, *Diferencialna geometrija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1989.

PLEMLJEV TRIKOTNIK IN NEGIBNE TOČKE TRANSFORMACIJ

IVAN PUCELJ

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 51M04, 51M15

»Konstruiraj trikotnik z dano dolžino osnovnice in višine nanjo ter znano razliko notranjih kotov ob tej osnovnici« – to je vaja iz učbenika, po katerem je učil geometrijo v srednji šoli Plemljev profesor Borštner. K tej vaji se je profesor Plemelj zelo rad vračal, posebno na božičnih počitnicah, in je sestavil kar zajetno zbirko različnih rešitev [1].

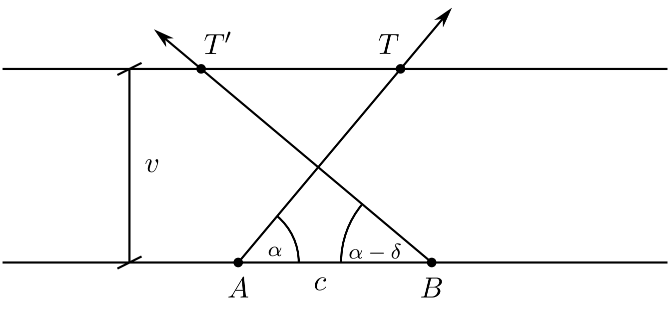
PLEMELJ'S TRIANGLE AND FIXED POINTS OF TRANSFORMATIONS

»Construct a triangle if one side, its altitude and a difference of two angles along it are given« – this is an exercise in the geometry textbook that was used by professor Borštner who taught Josip Plemelj in the high school. This problem attracted professor Plemelj later in his life (especially during Christmas holidays), and so he found several different solutions [1].

V tem zapisu predstavimo način, kako rešiti nalogo, ki ga je nam, študentom matematike, v letih 1952/53 (v svojem predavanju »Osnove geometrije, projektivna geometrija«) omenil profesor Ivan Vidav.

Označimo osnovnico trikotnika ABC in višino nanjo (točneje njuni dolžini) $c = \overline{AB}$ in v ter razliko kotov ob osnovnici $\alpha - \beta = \delta$.

Narišimo vzporednici v medsebojni razdalji v in daljico AB na spodnji vzporednici. Iz oglišča A potegnimo pod poljubnim kotom $\alpha \neq 0$ poltrak in iz oglišča B poltrak pod kotom $\alpha - \delta$. Označimo presečišči poltrakov (ali njunih nosilk) z drugo vzporednico: T in T'.



Kakšna je zveza med T in T'? Koti v tej »igri« so usmerjeni.

Postavimo izhodišče koordinatnega sistema xy v točko A, abscisno polos $x > 0$ skozi točko B in vzemimo, da je $c = v = 1$! Potem je enačba druge vzporednice kar $y = 1$, medtem ko sta (enačbi premic) AT in BT' dani z enačbama:

$$y = (\tan\alpha)\, x \quad \text{in} \quad y = -\tan(\alpha - \delta)\cdot(x-1).$$

Naj bosta x in x' zaporedoma abscisi točk T in T'. Če na kratko označimo $a = \tan\alpha$ in $d = \tan\delta$ ter uporabimo adicijski izrek za tangens (ki velja za poljubna kota!), izpeljemo zvezi:

$$x = \frac{1}{a} \quad \text{in} \quad x' = 1 - \frac{1+ad}{a-d}, \tag{1}$$

če je le $a \neq 0$ in $a \neq d$. Torej imamo zvezo:

$$x' = \frac{(d+1)x + (d-1)}{dx - 1}, \tag{2}$$

če je $x \neq \frac{1}{d}$.

Konstruirati želeni trikotnik pomeni rešiti enačbo $x' = x$, torej kvadratno enačbo:

$$dx^2 - (d+2)x - (d-1) = 0.$$

Diskriminanta $(d+2)^2 + 4d(d-1) = 5d^2 + 4$ je vedno pozitivna in korena enačbe sta:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2d}((d+2) \pm \sqrt{5d^2+4}), \text{ če je } d \neq 0. \tag{3}$$

Če pa je $d = 0$, torej $\delta = 0$, dobimo iz (1) $x' = 1 - x$ in enačba $x' = x$ ima rešitev $x = \frac{1}{2}$. Trikotnik ABC je enakokrak.

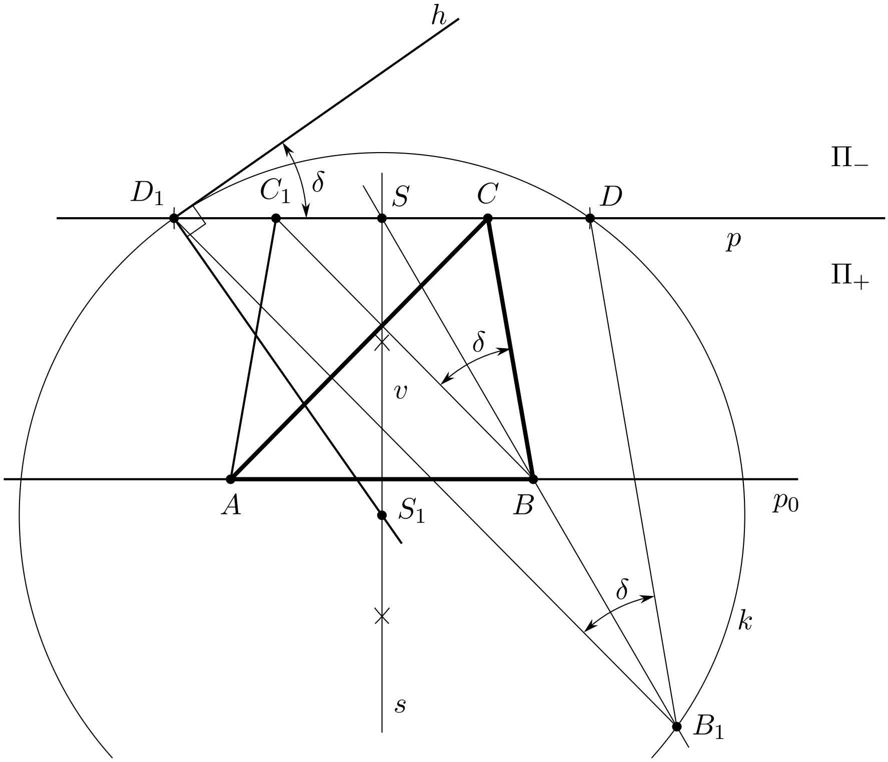
Konstrukcijo negibnih točk transformacije (2), torej konstrukcijo »Plemljevega trikotnika«, opremo na tale znani izrek elementarne geometrije (ki je sicer zelo uporaben):

Množica vseh takih točk v ravnini, iz katerih se »vidi« dana daljica pod predpisanim kotom ψ $(0 < \psi < +\pi)$, sestoji iz dveh krožnih lokov brez krajišč (dane daljice).

Iz zveze (3) v prvem delu sklepamo, da je mogoča za konstrukcijo negibne točke klasična konstrukcija s šestilom (in ravnilom). Oglejmo si jo (eno izmed številnih):

Podatki: osnovnica AB z dolžino c, višina v in kot z velikostjo $\delta \in (0, \pi)$, ki je razlika kotov ob osnovnici, recimo $\beta - \alpha = \delta$.

Potek konstrukcije: omejimo se na primer $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$; dani premici p_0, nosilki osnovnice AB, postavimo v razdalji v vzporednico p; bodi s simetrala daljice AB; označimo polravnini Π_- in Π_+ premice p, tako da sta A in B na Π_+; simetrala s seče premico p v točki S; na premici p izberimo poljubni različni točki D in D_1 simetrično glede na S; točki D_1 in A naj bosta na skupni polravnini premice s; dani kot δ prenesemo na polravnino Π_- tako, da je D_1 vrh kota in je poltrak D_1S en krak, drugi krak pa zaznamujmo s h; v D_1 postavimo pravokotnico na h; pravokotnica seka simetralo s v točki S_1; označimo s k krožnico s središčem S_1 in s polmerom S_1D_1; naj bo točka



B_1 presek premice SB s krožnico k na polravnini Π_+; skozi B postavimo vzporednici premicama B_1D in B_1D_1; ti dve vzporednici sečeta premico p npr. v točkah C in C_1. Obodni kot $\widehat{DB_1D_1}$ je enak δ.

Trdimo: trikotnik ABC ustreza podatkom, ima osnovnico c, višino v in razliko kotov ob osnovnici enako δ.

Dokaz. Zaradi podobnosti trikotnikov D_1B_1D in C_1BC je kot $\widehat{C_1BC}$ enak δ. Ker sta trikotnika ABC in BAC_1 simetrična glede na premico s, je kot $\widehat{ABC_1}$ enak kotu α, torej imamo $\beta = \alpha + \delta$. ■

Dodatek: Na podlagi podobnosti pokažemo, da je konsturirani (Plemljev) trikotnik neodvisen od izbire temeljnih točk D in D_1 (eliptičnega krožnega šopa). Bralcu predlagamo pregled članka [3].

LITERATURA

[1] J. Plemelj, *Iz mojega življenja in dela*, Obzornik mat. fiz. **39** (1992), 188–192.

[2] D. Modic, *Plemljev trikotnik in njegovi bratje*, [predavanje], *Strokovno srečanje in 65. občni zbor DMFA Slovenije, Bled, 15. in 16. november 2013*, str. 52–53, 2013.

[3] O. Sajovic, *Krožni šopi in enakoosna hiperbola*, Obzornik mat. fiz. **1** (1951), 2–8.

NA OBISKU PRI KOMETU

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 96.30.Cw

Vesoljsko sondo Rosetta, ki se kot umetni satelit giblje okoli kometa Čurjumov-Gerasimenko, in pristanek njenega pristajalnika Philae na tem kometu pogosto navedejo kot najpomembnejši dosežek v fiziki leta 2014. Izšla so tudi že prva poročila o rezultatih merilnikov na Rosetti.

VISITING A COMET

The spacecraft Rosetta, that is moving as an artificial satellite around the comet Churyumov-Gerasimenko, and the landing of the lander Philae on this comet is often quoted as the breakthrough of the year 2014 in physics. First results obtained with instruments on Rosetta have already been published.

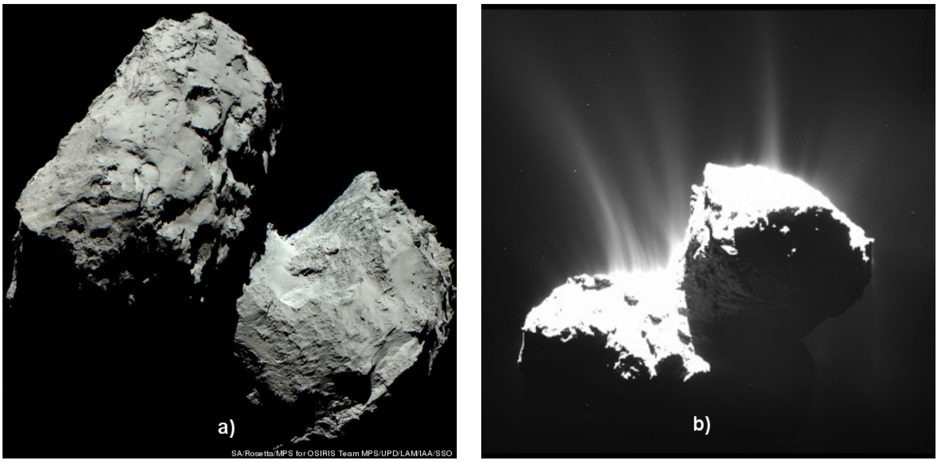
Kometi

Komete med vsemi telesi v Osončju sestavlja snov, ki je najbolj podobna snovi na začetku Osončja. Astrofiziki si prizadevajo, da bi ugotovili sestavo snovi kometov. Zanimajo jih tudi organske spojine v njej, ki bi utegnile osvetliti razvoj življenja na Zemlji. Večina aminokislin v živih bitjih na Zemlji je levosučnih. Ali je med nesimetričnimi organskimi molekulami na kometu več levosučnih kot desnosučnih?

Ob vrnitvi Halleyjevega kometa leta 1986 so proti njemu usmerili več sond, da bi spoznali njegovo sestavo. Pozneje so proti raznim kometom poslali še nekaj sond. Pri hitrih obletih (flyby) mimo kometa so sonde zajele in analizirale le snov *kome*, to je oblaka plinov in prahu, ki obdaja jedro kometa. Spoznali so, da tako ne bo mogoče dobiti podrobnih podatkov o sestavi kometnega jedra. Z obleti tudi niso mogli neposredno zasledovati pojavov na kometu, ko se bliža Soncu in se razvijejo koma in značilna repa.

Pri Evropski vesoljski agenciji ESA in Severnoameriški vesoljski agenciji NASA so se lotili načrtov. Pri ESA so se odločili za sondo, ki naj bi se z vzorcem kometnega jedra vrnila na Zemljo, pri NASA pa za sondo, ki naj bi od blizu posnela srečanje kometa in asteroida. Leta 1992 se je NASA zaradi pomanjkanja sredstev odpovedala načrtu. Leto pozneje je iz enakega razloga ESA spremenila načrt. Po novem naj bi leta 2003 izstrelili sondo Rosetta, ki bi se kot umetni satelit gibala okoli kometa 46P/Wirtanen in nanj poslala pristajalnik Philae. Toda leto pred tem se je ponesrečila izstrelitev rakete, kakršno so nameravali uporabiti. Dokler niso ugotovili vzroka za napako, so zadržali izstrelitve. Tako se je izstrelitev Rosette zakasnila. Zato so izbrali komet 67P/Čurjumov-Gerasimenko, ki je večji od kometa Wirtanen, in prilagodili dele načrta.

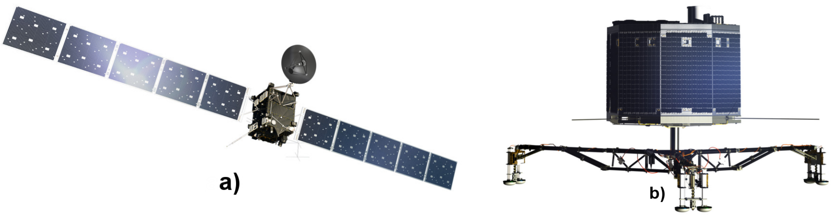
67P je komet iz Jupitrove družine, ki se mu je zaradi vpliva Jupitra in asteroidov v pasu med Marsom in Jupitrom perihelij, to je najmanjša razdalja, do katere se je približal Soncu, s časom manjšal. Po letu 1959 pa se je tirnica ustalila. Komet je periodičen z obhodnim časom 6,55 leta. Njegov vrtljaj traja 12,4 ure. Giblje se po elipsi z veliko polosjo $a = 3{,}463$ a.e. in ekscentričnostjo $\varepsilon = 0{,}641$ (astronomska enota, a.e., je približno enaka povprečni oddaljenosti Zemlje od Sonca). Perihelij meri $r_{min} = a(1-\varepsilon) = 1{,}243$ a.e., in afelij, to je največja razdalja, $r_{maks} = a(1+\varepsilon) = 5{,}683$ a.e. Masa je 10^{13} kg. Komet je nepravilne oblike s prostornino 21,3 km^3 in povprečno gostoto 470 kg/m^3 (slika 1).



Slika 1. Komet Čurjumov-Gerasimenko. Svetlana Gerasimenko je na Astrofizikalnem inštitutu v Almi Ati posnela fotografije nekega kometa. Klim Čurjumov je po vrnitvi v Kijev leta 1969 ugotovil, da gre za nov komet in ne za tistega, ki so ga želeli opazovati. Potem so novi komet zasledili tudi z velikimi teleskopi. Komet ima nenavadno obliko. Po eni od domnev je nastal, ko sta se spojili dve telesi. Za manjšega navajajo okvirne razsežnosti 2,5 km krat 2,5 km krat 2,0 km, za večjega pa 4,1 km krat 3,2 km krat 1,3 km (a). Čeprav je komet še precej daleč od perihelija, je mogoče opazovati, kako iz nekaterih delov odparevajo curki plinov in delcev prahu (b). Naredili so zemljevid površja kometnega jedra in predelom dali imena iz egipčanske mitologije.

Rosetta in Philae

Na sondi Rosetta sistem za prenos podatkov sestavljajo premična 2,2-metrska paraboloidna antena, nepremična 0,8-metrska paraboloidna antena in dve neusmerjeni anteni. Na sondi je 24 parov motorjev s potiskom po 10 newtonov, od teh štirje pari delujejo v sunkih. Silicijeve sončne celice s površino 64 m^2 v ugodnih razmerah dajejo moč 1500 W (slika 2a) [11]. V mirovanju potrebujejo naprave le 400 W. Presežno energijo hranijo štiri nikelj-kadmijeve baterije po 10 Ah. Grelniki skrbijo, da se merilniki preveč ne ohladijo. Masa sonde je ob izstrelitvi merila 2900 kilogramov vključno s pristajalnikom Philae z maso 100 kilogramov. Na voljo je bilo 1719 kg goriva in oksidacijske snovi.



Slika 2. Sonda Rosetta (a) [11] in pristajalnik Philae (b) [12]. Imena so duhovita. *Kamen iz Rosette* so našli med Napoleonovim pohodom v Egipt blizu kraja Rosette (Rashid). Na kamnu je bila izklesana uredba iz leta 196 pr. n. št. v hieroglifih in demotski ter grški pisavi. To je bilo v pomoč pri razvozlavanju hieroglifov. Na enem od otočkov Philae (File) v Nilu je bil na obelisku napis v dveh pisavah, ki je imel podobno vlogo. Tempelj so z otočka zaradi starega asuanskega jezu preselili na bližnji otok Agilkia (ti otoki ležijo pod novim asuanskim jezom). Po javnem natečaju je ESA tako imenovala načrtovani kraj pristanka. Novi kraj pristanka nima imena.

Sonda Rosetta nosi dvanajst merilnikov. Polovica jih zaznava elektromagnetno valovanje. Ultravijolični spektrograf meri delež žlahtnih plinov, po katerem je mogoče sklepati, kaj se je v preteklosti dogajalo s snovjo. Posebna kamera omogoča slikanje v vidni in infrardeči svetlobi. Drugi spektrometer daje slike v vidni in infrardeči svetlobi. Mikrovalovni merilnik ugotavlja delež in temperaturo hlapnih snovi. Radar raziskuje globlje plasti kometnega jedra z valovi s pristajalnika. Merilnik za raziskovanje jedra in bližnjih delov kome izkorišča radijske valove, sicer namenjene prenosu sporočil.

Druga polovica merilnikov zaznava delce. Magnetni masni spektrometer zaznava ione in nevtralne delce. Mikroskop na atomsko silo otipa delce prahu, ki se naberejo na silicijevi ploščici. Analizator mase ugotavlja sestavo delcev prahu po obstreljevanju z indijevimi ioni. Drug analizator z merjenjem sipalnega preseka svetlobe ter gibalne količine, hitrosti in mase zaznava delce prahu. Merilnik plazme ugotavlja delce v sončnem vetru.

V pristajalniku Philae je pod delom z merilniki mehanizem za pristajanje, ki ga sestavljajo kardanski zglob, dušilniki, ogrodje in tri noge (slika 2b) [12]. Ob dotiku naj bi se sprožili harpuni in pristajalnik zasidrali na kometu. Enako vlogo naj bi imeli ledni vijaki, ki bi se privili v led kometnega jedra. Ob pristanku naj bi reakcijski motor deloval s silo proti kometu.

V pristajalniku je devet merilnikov. Spektrometer po rentgenskem sevanju, ki ga sprožijo delci α iz radioaktivnega izvira, ugotavlja elemente na površju jedra. Drugi merilnik združuje plinski kromatograf in masni spektrometer na čas preleta in ugotavlja elemente v komi. Merilnik meri deleže obstojnih izotopov v komi. Merilnik s sedmimi enakimi kamerami za panoramsko slikanje površja s polprevodniškimi slikovnimi napravami CCD vsebuje še optični mikroskop in infrardeči spektrometer ter zaznava sestavo, zgradbo in odbojnost vzorcev s površja. Kamera CCD med spuščanjem proti kometu snema površje z visoko ločljivostjo. Radar ugotavlja notranjo zgradbo jedra. Večnamenski senzorji dajejo podatke o toplotni prevodnosti ter o gostoti in drugih mehaničnih lastnostih površja in plasti tik pod njim. Magnetometer in merilnik plazme ugotavljata magnetno polje in delovanje sončnega vetra. Merilnik na tri načine z zvokom preiskuje lastnosti površja in prahu na njem. Sveder daje vzorce do globine 23 cm in jih posreduje desetim pečicam za srednjo in šestnajstim za visoko temperaturo ter drugim merilnikom.

Od 21 merilnikov je tri prispevala NASA, pri drugih pa so sodelovale raziskovalne ustanove iz Kanade in evropskih držav: Anglije, Avstrije, Belgije, Finske, Francije, Irske, Italije, Madžarske, Nemčije, Nizozemske, Poljske, Španije in Švice. Delovanje sonde nadzorujejo iz Evropskega centra za vesoljske operacije ESOC v Darmstadtu v Nemčiji. Za zbiranje, shranjevanje in razširjanje podatkov skrbi Evropski vesoljski astronomski center ESAC v Villanuevi de la Cañada blizu Madrida. Podvig je stal okoli milijarde in tristo milijonov evrov. V njem je sodelovalo ali sodeluje okoli dva tisoč strokovnjakov.

Pot

Drugega marca 2004 so z izstrelišča v Francoski Gvajani izstrelili nosilno raketo Ariane 5G. Zadnja stopnja se je najprej gibala po tirnici okoli Zemlje. Potem so jo pospešili do ubežne hitrosti in usmerili na tirnico okoli Sonca, nato se je od nje ločila sonda. Maja so sondo preusmerili proti kometu. Marca 2005 je sonda ob prvem obletu Zemlje z gravitacijsko pomočjo (gravitational assist) dobila dodatno hitrost. Februarja 2007 se je to ponovilo ob obletu Marsa.

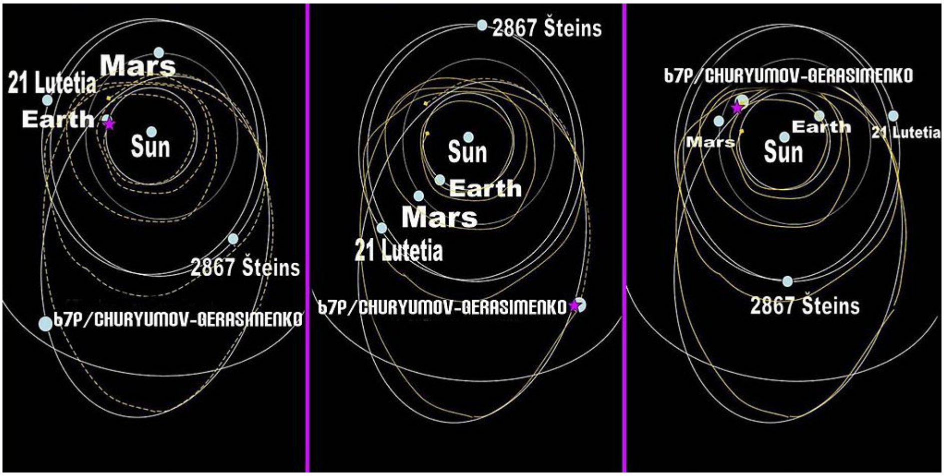
Novembra 2007 je sledil drugi oblet Zemlje s hitrostjo 12,5 km/s (ubežna hitrost z Zemlje je 11,2 km/s). Tedaj so nekateri opazovalci z Zemlje sondo zmotno imeli za asteroid. Nato je sonda letela mimo asteroida 22867 Šteins iz pasu asteroidov. Novembra 2009 je še tretjič obletela Zemljo s hitrostjo 13,3 km/s. Julija 2010 je letela mimo velikega asteroida 21 Lutetia iz pasu asteroidov. Ob obletih so preizkusili delovanje nekaterih merilnikov in posneli zanimive slike teles, mimo katerih je sonda letela. Sicer so merilniki počivali. Sonda je dohitela komet 6. avgusta 2014 v oddaljenosti 3,7 a.e. od Sonca. Motorji so hitrost glede na komet od 775 m/s zmanjšali na 7,9 m/s. Sonda se je postopno približala kometu na 100 km in nato na 50 km. Naposled se je začela gibati okoli kometa kot njegov satelit. Zdaj se giblje v oddaljenosti okoli 10 km.

Že to je bil dosežek. Po več milijard kilometrov dolgi in skoraj enajst let trajajoči poti so sondo pripeljali tja, kamor naj bi po načrtih prispela. Pred izstrelitvijo so tirnico kometa poznali le na sto kilometrov natančno. Sondo so usmerjali z motorji, ki so jih vključevali po ukazih z Zemlje. Ukaz je nazadnje do sonde potoval 28 minut. Toliko potuje tudi poročilo s sonde.

Pristanek

Dvanajstega novembra, ko je bil komet 3 a.e. oddaljen od Sonca, se je pristajalnik ločil od sonde, se začel spuščati proti kometu in ga v sedmih urah dosegel. Nazadnje naj bi se spuščal s hitrostjo okoli 1 m/s, kolikor navajajo za ubežno hitrost s kometa v modelskih računih. Komet ima zelo nepravilno obliko in njegovo gravitacijsko polje izrazito odstopa od krogelne simetrije (slika 3).

Ob spustu se je pristajalnik jedra kometa dotaknil na predvidenem kraju. Vendar je bil dotik bolj rahel, kot so predvideli, in harpuni nista delovali. Za motor, ki naj bi deloval proti jedru, so že prej ugotovili, da je pokvarjen. Kaže tudi, da je bil led zelo trd in ledni vijaki niso prijeli. Pristajalnik se je odbil s hitrostjo 0,38 m/s. Navajajo, da bi odletel v vesolje, če bi hitrost dosegla 0,44 m/s, kolikor naj bi merila ubežna hitrost na kraju dotika. Po uri in 51 minutah je pristajalnik padel nazaj na komet. Še enkrat se je odbil s hitrostjo 0,03 m/s in že po slabih 6 minutah padel nazaj. Obmiroval je na kraju, ki ga niso predvideli. V končni legi sončne celice ležijo v senci in ne morejo poganjati merilnikov. Ti so delovali le 57 ur, dokler se niso izpraznile baterije. Nadejajo se, da bodo sončne celice dobile dovolj svetlobe, ko se bo komet približal periheliju 13. avgusta, in bodo merilniki na pristajalniku zopet delovali.



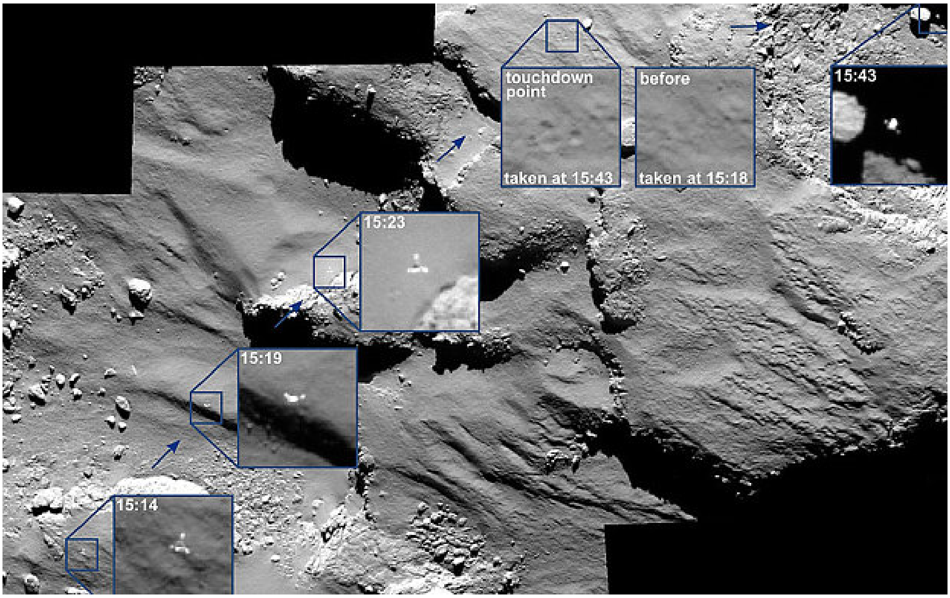
Slika 3. Okvirna risba kaže lego teles v Osončju na njihovih tirnicah ob istrelitvi marca 2004 (levo), ob prihodu sonde v bližino kometa maja 2014 (sredina) in ob koncu misije decembra 2015 (desno) [11].

Rezultati z Rosette

Težave pri pristanku Philae niso zavrle raziskovanj. Glavno delo naj bi tako ali tako opravili merilniki na Rosetti. Predvidevajo, da bo delovala do decembra 2015, ko bo spremljala komet na poti okoli Sonca. Podatke merilnikov na Rosetti so že obdelali in prve rezultate objavili [3–12]. Podatke merilnikov s Philae še obdelujejo.

Posnetki kažejo, da sestavljata jedro dva dela, ki ju povezuje ozek *vrat*. V večji razdalji od Sonca kot 3 a.e. izhajajo curki plina in prahu v glavnem iz vratu. Jedro izgublja snov s sublimacijo in z izbruhi zaradi naraslega tlaka v notranjosti [8]. Ni jasno, ali je jedro nastalo s trkom in spojitvijo dveh teles ali z odparevanjem snovi z večjega telesa. Med oddaljenostma od Sonca od 3,4 do 3,6 a.e. je jedro zapustilo 35 zrnc prahu z maso med 10^{-7} in 10^{-4} g in 48 zrn z maso od 0,01 in 10 g. Ugotovili so, da je v povprečju za osvetljeni del površja razmerje med tokovoma prahu in plina okoli 4 [7]. Jedro obkroža oblak kep, od katerih imajo največje premer okoli meter. Najbrž so preostale od prejšnjega perihelija. Povprečna gostota jedra je precej manjša od pričakovane gostote ledu in prahu od 1500 in 2000 kg/m^3. Jedro je torej precej luknjičavo.

Opazovali so, kako nastane magnetosfera, ko se komet bliža Soncu. Spočetka gre sončni veter nemoteno skozi zelo redko komo. Z odparevanjem koma postaja vse gostejša. Sončna ultravijolična svetloba in tudi delci sončnega vetra ionizirajo molekule v njej. Gostejši prevodni plin začne odbijati



Slika 4. Kamera z Rosette je spremljala spuščanje pristajalnika Philae. Na posnetku po odboju ob 15:43 je mogoče videti sledi treh nog. Tretjič je pristajalnik pristal na neznanem kraju. Sonce osvetli dele kometa samo kratek čas in kamera lahko naredi dober posnetek le, če je sonda na pravem kraju. S težavo so prepoznali 30 m širok in 350 m dolg pas, na katerem je pristajalnik. – Na spletu je mogoče dobiti veliko zapisov in fotografij v Googlu na *Rosetta Mission*. Na *Comet 67P Churyumov-Gerasimenko & The Rosetta ...* je mogoče izvedeti trenutni oddaljenost kometa in hitrost. Nekateri podatki med seboj niso usklajeni. ESA/Rosetta.

sončni veter. V razdalji od Sonca okoli 3,3 a.e. magnetno polje kometa dobi mejo in nastane magnetosfera [2]. Magnetno polje kometa niha z nihajnim časom od 20 do 25 s.

Na posnetkih je mogoče na površju jedra videti veliko različnih tvorb, ki so najbrž nastale z neenakomernim odparevanjem. Površje jedra zapuščajo tudi večji kosi [6]. Masni spektrometer je za razmerje med devterijem, težjim izotopom vodika, in lažjim navadnim izotopom vodika v atmosferi dal $(5{,}3 \pm 0,7) \cdot 10^{-4}$. To je precej več od povprečnega razmerja na Zemlji $1{,}5 \cdot 10^{-4}$. Po tem sklepajo, da vode na Zemljo niso prinesli kometi, vsaj ne kometi iz Jupitrove družine [10]. Morda so jo prinesli asteroidi.

Spektrometer je izmeril sestavo kome. Največ je vode ter ogljikovega monoksida in dioksida. Sestava pa se spreminja v odvisnosti od vrtenja kometnega jedra in od oddaljenosti od Sonca. To kaže na zapleteno odvisnost kome od jedra, za katero utegne biti odločilna razlika temperatur na površju in tik pod njim [1]. Pomembno vlogo ima prehod toplote in sublimacija ledu.

Z mikrovalovi z valovno dolžino 0,5 mm in 1,6 mm so ugotovili, da je jedro najprej vsako sekundo izgubilo 0,3 kg, avgusta pa že 1,2 kg snovi. Tok plinov in prašnih delcev se periodično spreminja tudi zaradi vrtenja jedra. Temperatura tik pod površjem se spreminja z oddaljenostjo od Sonca in zaradi vrtenja jedra [5]. Po izkušnjah z drugimi kometi se pojavita izrazitejša repa kak mesec pred perihelijem. Delci medplanetnega prahu, ki padajo na Zemljo, verjetno izvirajo iz kometov.

Jedro kometa je zelo trdo in ga sestavlja led in mešanica ledu in prahu. Na nekaterih mestih ga pokriva do 20 cm debela plast prahu. Za temperaturo navajajo za zdaj od -68 °C do -43 °C. Zaznali so vodno paro, ogljikov oksid in dioksid, amoniak, metan, metanol, natrij, magnezij. Površje kometa je temno in suho. Albedo je 0,06. Na površju ni vodnega ledu, a ga je obilo v notranjosti. Temno površje vsebuje železov sulfid in veliko spojin z ogljikom.

Nekaj računov

Čeprav gravitacijsko polje jedra ni krogelno simetrično, naredimo nekaj preprostih računov za krogelno simetrijo. Za maso kometa vzamemo $M = 10^{13}$ kg in za gostoto $\rho = 470$ kg/m^3. Prostornina homogene krogle je $V = 4\pi r_0^3/3$ in polmer $r_0 = (3M/4\pi\rho)^{1/3}= 1{,}72$ km. Težni pospešek na površju je $g = \mathcal{G}M/r_0^2 = 2{,}25 \cdot 10^{-4}$ m/s^2 in ubežna hitrost $v_u = \sqrt{2\mathcal{G}M/r_0}= 0{,}881$ m/s. Pri tem je $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg s^2) gravitacijska konstanta. Taki računi imajo le omejen pomen, ker se oblika kometa močno razlikuje od krogle, pa še porazdelitev mase ni znana.

Iz zveze $\omega^2 R = \mathcal{G}M/R$ s kotno hitrostjo $\omega = 2\pi/T$ dobimo za obhodni čas T sonde v razdalji $R = 10$ km od kometa $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{R^3/\mathcal{G}M} = 2{,}43 \cdot 10^5$ s $= 67{,}6$ ure. Koma bo s časom postajala gostejša, zaradi česar bodo razdaljo povečali na 30 km. Obhodni čas se bo povečal na 14,6 dneva. 14. februarja je sonda letela mimo jedra kometa v razdalji 6 km.

Vključimo v račun še čas. V gravitacijskem polju kometa je na enoto mase pristajalnika preračunana polna energija:

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \mathcal{G}M/r = -\mathcal{G}M/R_m. \tag{1}$$

R_m je skrajna oddaljenost, ki jo doseže pristajalnik. Če se pristajalnik v radialni smeri odbije od površja kometa s hitrostjo v_0, manjšo od ubežne hitrosti v_u, velja:

$$v_0^2 - 2\mathcal{G}M/r_0 = -2\mathcal{G}M/R_m \quad \text{in} \quad R_m = 2\mathcal{G}M/(v_u^2 - v_0^2).$$

V enačbo (1) vstavimo $v = dr/dt$ in po nekaj korakih dobimo zvezo:

$$\int \sqrt{x}dx/\sqrt{1-x} = t/\tau \quad \text{z} \quad x = r/R_m \quad \text{in} \quad \tau = \sqrt{R_m^3/2\mathcal{G}M}.$$

Z novo spremenljivko $u = \sqrt{1-x}$ integral prevedemo v $-2\int \sqrt{1-u^2}du$ in dobimo za čas dviganja s površja krogle:

$$t = \tau(\sqrt{x_0(1-x_0)} + \arcsin\sqrt{1-x_0}) \quad \text{s} \quad x_0 = r_0/R_m.$$

Vzemimo, da se pristajalnik odbije s hitrostjo $v_0 = 0,6$ m/s. Pri ubežni hitrosti v_u = 0,88 m/s da to R_m = 3220 m in τ = 5000 s = 1,39 ure. Z $x_0 = 1720/3220 = 0{,}534$ je nazadnje čas dviganja $1{,}25 \cdot 1{,}39 = 1,74$ ure. Čas spuščanja je enak, tako da dobimo, da odboj pristajalnika traja 3,48 ure. To kaže primerjati s časom 1 ure in 51 minut = 1,85 ure. Po tem sklepamo, da račun ni veliko vreden. V tem okviru si ni mogoče zamisliti podatkov, s katerimi bi se približali trajanju 1,85 ure pri ubežni hitrosti 0,44 m/s in hitrosti odboja 0,38 m/s.

LITERATURA

[1] K. Altwegg et al. *67P/Churyumov-Gerasimenko, a Jupiter family comet with a high D/H ratio*, Science **347** (2015) 1261952-1-3.

[2] F. Capaccioni et al., *The organic-rich surface of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko as seen by VIRTIS/Rosetta*, Science **347** (2015) aaa0628-1-4.

[3] S. Gulkis et al., *Subsurface properties and early activity of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko*, Science **347** (2015) aaa0709-1-5.

[4] E. Hand, *Comet close-up reveals a world of surprises*, Science **347** (2015) 358–359.

[5] M. Hässig et al., *Time variability and heterogeneity in the coma of 67P/Churyumov-Gerasimenko*, Science **347** (2015) aaa0267-1-4.

[6] H. Nilsson et al., *Birth of a comet magnetosphere: A sppring of water ions*, Science **347** (2015) aaa0571-1-4.

[7] A. Rotundi et al., *Dust measurements in the coma of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko inbound to the sun*, Science **347** (2015) aaa3905-1-6.

[8] H. Sierks et al., *On the nucleus striucture and activity of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko*, Science **347** (2015) aaa1044-1-5.

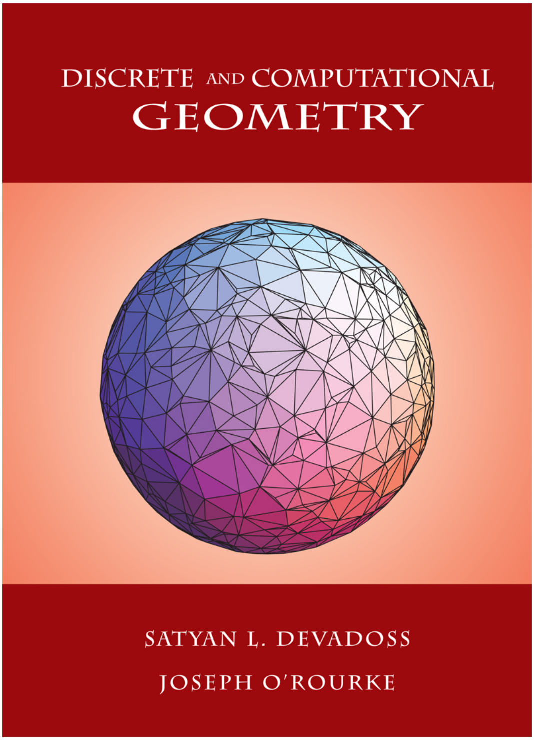
[9] M. G. G. Taylor, C. Alexander, N. Altobelli, M. Fulle, M. Fulchignoni, E. Grün, P. Weissmann, *Rosetta begins its comet tale*, Science **347** (2015) 387.

[10] N. Thomas et al., *The morphological diversity of comet 67P/Churyumov-Gerasimenko*, Science **347** (2015) aaa0440-1-6.

[11] *Rosetta (spacecraft)*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Rosetta`_(spacecraft), ogled: 9. 2. 2015.

[12] *Philae (spacecraft)*, `http://en.wikipedia.org/wiki/Philae` _(spacecraft), ogled: 9. 2. 2015.

Satyan L. Devadoss, Joseph O'Rourke: Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2011, 255 strani.



Diskretna geometrija je otrok XX. stoletja, računska geometrija pa 1970-ih let. »Diskretna« geometrija se osredotoča na končne množice točk, premic, trikotnikov in drugih geometrijskih objektov, drugače kakor »zvezna« geometrija, ki obravnava npr. gladke ploskve.

Področji diskretne in računske geometrije sta tesno povezani, in vsak napredek na enem od njiju prinese napredek na drugem. Prvo pripada čisti matematiki, drugo aplikativni smeri v računalniški znanosti. Iz številnih interakcij med njima je zrasla nova disciplina, ki pomeni idealen most med matematiko in računalniško znanostjo. Knjiga je nastala prav iz želje, premostiti vrzel med njima.

V skladu s tem ciljem so v knjigi (razdeljeni na sedem poglavij: 1. Poligoni, 2. Konveksne lupine, 3. Triangulacije, 4. Voronoievi diagrami, 5. Krivulje, 6. Poliedri, 7. Konfiguracijski prostori) uravnoteženo zastopani *izreki* in *algoritmi*. Ker gre za knjigo o geometriji, predstavljeni algoritmi ne temeljijo na sofisticiranih programerskih trikih, ampak na jasni geometrijski intuiciji, zato so lahko razumljivo opisani brez uporabe kakršnegakoli posebnega programskega jezika in celo brez psevdokode, tako da za branje knjige ni treba nobenega programerskega predznanja.

V knjigi so številni dokazi pomembnih izrekov. Tako je npr. dokazana poligonska verzija »Jordanovega izreka o krivulji«, pa tudi poliedrska različica Gauss-Bonnetovega izreka $\int_S K dA = 2\pi\chi(S)$, ki vzporeja »globalne« in

»lokalne« lastnosti ploskve (zajete v »topološkem« konceptu Eulerjeve karakteristike $\chi(S)$ in v »metričnem« konceptu Gaussove ukrivljenosti K ploskve S v vsaki njeni točki). Dostikrat so omenjene tudi posplošitve izrekov na višje dimenzije. Da bi bil »matematični del« dostopnejši tudi študentom računalništva, so nekateri dokazi le skicirani. Vsako v knjigi obravnavano področje je predstavljeno tudi v kontekstu aplikacij, ki so pogosto predstavljale prvotno motivacijo za njegovo raziskovanje. Predstavljeni so tudi nekateri zanimivejši problemi (kot npr. znani Kleejev »Problem umetnostne galerije« o minimalnem številu stražarjev, ki lahko nadzorujejo galerijo dane poligonske oblike).

Avtorja v predgovoru programsko deklarirata trditev, na katero včasih pretirano »algebraizirana« sodobna matematika rada pozablja: *Geometrija potrebuje slike!* Številne barvne ilustracije resnično naredijo knjigo veliko lažje berljivo in olajšajo razumevanje. Jezik razlage je pomensko bogat in obenem nazoren, veliko je vzporejanj in komparacij. Tako npr. avtorja primerjata vlogo poligonov v geometriji z vlogo celih števil v numerični matematiki: v obeh primerih gre za diskretno množico v univerzumu vseh možnosti, ki omogoča učinovito računanje, in triangulacije so za poligone približno to, kar je za cela števila njihova faktorizacija na prafaktorje (čeprav triangulacije niso enolične).

V knjigi je veliko vaj oziroma nalog, in ker gre za relativno novo področje, so omenjeni tudi številni nerešeni problemi. Tako je npr. problem karakterizacije »tetraedrizabilnih« poliedrov (tj. razdeljivih na tetraedre s paroma disjunktnimi notranjostmi) še vedno nerešen.

V knjigi najdemo veliko zanimivih geometrijskih in kombinatoričnih rezultatov, npr. formulo $\frac{1}{2}|\Sigma(x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)|$ za ploščino poligona z oglišči (x_i, y_i) in formulo za število triangulacij konveksnega $(n+2)$-kotnika, ki je enako n-temu Catalanovemu številu C_n. Eno ključnih orodij pri raziskavi triangulacij je t. i. »flip graph«; njegova vozlišča so triangulacije dane končne množice točk v ravnini, dve triangulaciji pa sta »sosednji«, če se razlikujeta le v izboru diagonale AC ali BD, ki »triangulira« neki četverokotnik $ABCD$.

Avtorja pokažeta, da je mogoče problem iskanja konveksne ogrinjače diskretne množice točk v ravnini rešiti z različnimi algoritmi, da pa niso vsi enako dobri, saj se le eden od njih (osnovan na metodi »deli in vladaj«) da posplošiti tudi na analogni tridimenzionalni problem. V Dodatku predstavita tudi osnove ocenjevanja računske zahtevnosti algoritmov in razložita osnovne koncepte, kot so npr. logaritemska, polinomska in eksponentna kompleksnost, NP-polni in NP-težki problemi.

Glavna odlika knjige je preplet teorije in prakse. Tako npr. definiciji Voronoievega diagrama, ki za vsako točko ravnine nazorno prikaže, kateri izmed končnega števila točk v tej ravnini je najbližja, sledi tudi razlaga njegove algoritmične konstrukcije, pa tudi njegove povezanosti z Delaunayevimi triangulacijami in konveksnimi ogrinjačami v treh dimenzijah. Podobno je v poglavju o krivuljah pojasnjena globoka zveza med »problemom skrajševanja krivulj« in Poincaréjevo domnevo.

Bolj »matematiki naklonjenemu« bralcu bo ugajala obravnava izrekov, kot je npr. »Cauchyjev izrek o rigidnosti«, ki pravi, da sta poljubna dva konveksna poliedra, ki sta kombinatorično ekvivalentna in imata skladna lica, tudi kongruentna (tj. imata skladna lica enako razporejena okrog vsakega oglišča, in vsi diedrski koti ob ustrezajočih si robovih teh dveh poliedrov so enaki). Prav tako mu bo zanimiva matematična obravnava različnih »konfiguracijskih prostorov«. Tako ima npr. poligon, translatiran in rotiran v trirazsežnem prostoru, šest prostostnih stopenj, njegov konfiguracijski prostor pa je $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$, kjer je $SO(3)$ posebna ortogonalna grupa. Bolj »računalništvu naklonjenega« bralca pa bo pritegnila obravnava gibanja robotske roke, modeliranega z ustreznim »konfiguracijskim prostorom« *odprte poligonske verige*. Avtorja nimata pomislekov bralcu v osnovnih obrisih predstaviti še zahtevnejše problemske sklope, kot je npr. določitev konfiguracijskega prostra *sklenjene poligonske verige* (tako se npr. izkaže, da je konfiguracijski prostor sklenjene ravninske verige s štirimi fiksiranimi dolžinami stranic ter fiksiranima ogliščema A in B ter gibljivima ogliščema C in D krog!), ali celo določitev konfiguracijskega prostora delcev na intervalu, katerih položaji lahko v določenih trenutkih sovpadejo.

Na koncu vsakega poglavja so tudi reference in kratek opis, kaj lahko najdemo v njih. Tudi v tem smislu je knjiga zelo prijazna do študenta, ki bi ga veselilo nadaljnje raziskovanje na tem področju in ki sam (bodisi zaradi nepoznavanja področja bodisi zaradi neveščosti pri iskanju virov) morda ne bi mogel tako hitro ali zlahka najti relevantne literature ali spletnih virov.

Sklepna misel: knjiga bralcu pomaga spoznati osnove osrednjih področij hitro razvijajočega se, zelo zanimivega in mnogostransko uporabnega področja diskretne in računske geometrije. Razblini tudi sleherni morebitni preostanek predsodka, da sta »čista« in »uporabna« matematika ločeni disciplini. Razumevanje, da je sodelovanje med obema nujno in plodno, je eden od naukov te knjige, ki si ga je vredno zapomniti, ko pozabimo vse drugo.

Jurij Kovič

Jože Peternelj in Tomaž Kranjc, Osnove fizike – Mehanika, termodinamika in molekularna fizika; Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2014, 487 str.

Jože Peternelj je profesor fizike na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Tomaž Kranjc predava različne predmete s področja fizike na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije (FAMNIT Koper) ter na Pedagoški fakulteti v Kopru.

Knjiga je nastala na podlagi predavanj osnovnega tečaja fizike. Obravnava osnovna področja fizike: mehaniko, termodinamiko in molekularno fiziko ter valovanje v 17 poglavjih, ki so razdeljena še na podpoglavja. Vsako poglavje se začne z opredelitvami fizikalnih količin ter njihovih povezav, ki jih dopolnjujejo tudi ustrezni grafični prikazi. Fizikalni zakoni so vedno zapisani z besedami in enačbami, dodan jim je obsežen komentar, ki opredeli pomen in uporabo teh zakonov. V vsakem poglavju so navedeni rešeni primeri z obrazložitvijo, zakaj je bila uporabljena določena povezava med količinami oziroma kaj vse lahko zanemarimo. Klasičnim primerom, ki jih najdemo tudi v drugih učbenikih osnov fizike, so dodani še manj znani primeri, s katerimi avtorja prikažeta, kako navedene zakone uporabimo pri reševanju problemov, vzpodbujata bralce k razmisleku in dajeta namige za reševanje podobnih problemov. Natisnjeni so na svetlo sivi podlagi, tako da jih bralec, ki utrjuje le teoretične osnove, lahko preskoči. Knjiga ne vsebuje dodatnih nerešenih nalog za utrjevanje in ponavljanje snovi.

Ker je knjiga obsežna, bomo pri posameznih poglavjih omenili le posebnosti in zanimive primere oziroma navedli le obravnavane teme.

V prvem poglavju, **Kinematika**, avtorja najprej obravnavata gibanje točkastega telesa. Celotno poglavje ima 11 rešenih primerov s komentarji. Med zanimivejšimi primeri so: merjenje hitrosti izstrelka, padanja dežne kaplje in določitev tira gibanja točkastega delca s pospeškom $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{C}$ v ravnini, ki je pravokotna na konstanten vektor $\vec{C}$, kar omogoča avtorjema, da že pri kinematiki obravnavata tudi gibanje naelektrenega delca v homogenem magnetnem polju.

V drugem poglavju **Newtonovi zakoni in osnove dinamike**, ki obravnava Newtonove zakone, so zanimivi primeri: padanje kroglice v glicerinu, bungee jumping, padanje kroglice z visokega stolpa, ki leži na ekvatorju. Na koncu je dodan še kratek izsek iz dela Galilea Galileja o relativnosti gibanja.

Vsebini tretjega in četrtega poglavja, **Gibalna količina** in **Navor in gibanje togega telesa**, opredelita že naslova. Navedimo le zanimiva primera iz četrtega poglavja, ki se med seboj dopolnjujeta:

1. V preteklosti se je Luna vrtela okrog svoje osi precej hitreje kakor danes, ko je kotna hitrost vrtenja Lune enaka njeni kotni hitrosti pri kroženju okrog Zemlje. Ali je to posledica gravitacijskih privlačnih sil, s katerimi Zemlja deluje na Luno? (Primer 3, stran 90.)

2. Čisto za konec pa premislimo še o naslednji trditvi. Zaradi medsebojnih plimskih sil se vrtilni količini Zemlje in Lune okoli njunih osi zmanjšujeta, zato njuna oddaljenost narašča, kar smo že omenili v enem od prejšnjih primerov. Poskusimo najti razlago s pomočjo zakona o ohranitvi vrtilne količine. (Primer 15, stran 113.)

Tudi iz petega poglavja **Delo in energija** navedimo le primer:

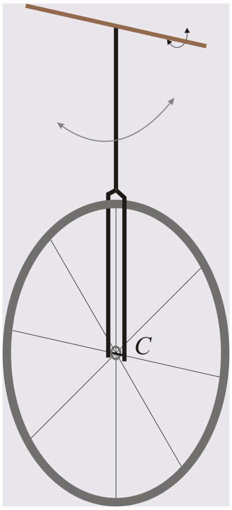
S kolikšno močjo vrti kolesar pedale kolesa pri vožnji v klanec z naklonskim kotom $\varphi = 10^\circ$, če je njegova hitrost ves čas enaka $v = 10\,\mathrm{m/s}$? Skupna masa kolesarja in kolesa je $m = 65\,\mathrm{kg}$. Upoštevaj zračni upor! (Primer 9 na strani 134.)

Šesto poglavje, **Newtonov gravitacijski zakon**, poleg klasičnih tem nekoliko obširneje, kot je to v drugih učbenikih, obravnava plimske sile na Zemlji ter tire satelitov in planetov, kjer so navedeni podatki o gibanju planetov in nekaterih umetnih satelitov. Na koncu poglavja je omenjeno še širjenje vesolja, dodani sta tudi dve zgodovinski opazki.

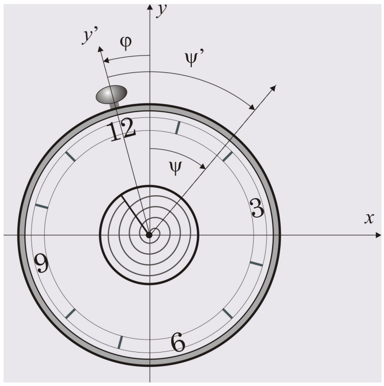
Poglavje **Nihanje** predstavimo z dvema primeroma:

1. Na lahkih vilicah z dolžino l je z lahkimi naperami pritrjeno kolo z maso m in polmerom R (slika 1). Drugi konec vilic je pritrjen na vodoravno os, okoli katere se vilice lahko vrtijo brez trenja. Nihalo izmaknemo iz ravnovesne lege za majhen kot φ_0 in spustimo. Določi nihajni čas, kotni pospešek v trenutku, ko nihalo spustimo, in kotno hitrost, ko gre nihalo skozi ravnovesno lego. Pri tem upoštevaj, da (a) v ležaju C kolesa ni trenja in (b) da je trenje v ležaju C tako veliko, da se vilice in kolo gibljejo kot togo telo.

2. Kakor je poročal Lord Kelvin, je žepna ura Archibalda Smitha iz Jordanhilla, ki jo je dobil kot priznanje za svoje delo *Deviations of Compass in Iron Ships*, v 1299 sekundah prehitela za eno sekundo, če je ležala na gladki vodoravni podlagi, prepuščena sama sebi. Razloži, zakaj gre ura hitreje, če leži na gladki vodoravni podlagi, kakor če je fiksirana. Trenje med podlago in uro zanemarimo (slika 2).



Slika 1. Nihanje kolesa.



Slika 2. Ura na gladki podlagi.

Poglavje se konča s tremi mislimi Isaaca Newtona.

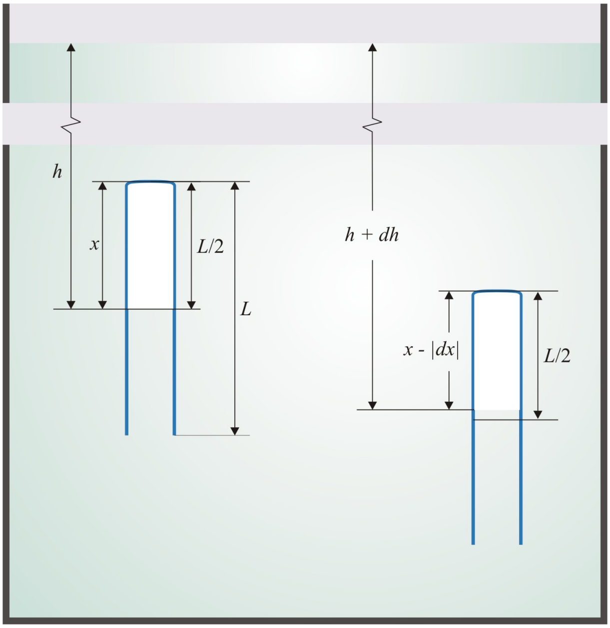
V poglavju **Mehanske lastnosti snovi** omenimo primer, ki je zanimiv predvsem zato, ker se danes s sondami da potopiti precej globoko:

Za koliko odstotkov je gostota vode v globini 4 km večja od gostote na gladini? Stisljivost vode je $4,5 \cdot 10^{-10}$ m^2/N, gostota na gladini pa približno $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3. Kolikšna je gostota elastične energije na tej globini? (Primer 5, stran 237.)

Obravnava snovi v poglavjih **Trki teles**, **Zgradba snovi**, **Toplota** in **Viskoznost** je klasična. V poglavju Toplota je naslednji primer:

Epruveto z dolžino $L = 20$ cm in stalnim prečnim presekom S obrnemo z odprtim koncem navzdol in jo počasi potopimo v vodo do take globine, da zrak v njej zapolnjuje polovico prostornine epruvete (slika 3). Za koliko moramo še potopiti epruveto, da se višina zračnega stolpca v njej zmanjša za 1 mm? Temperatura zraka in vode je enaka. Zunanji zračni tlak je $p_0 = 1$ bar. (Primer 3, stran 283.)

V poglavju **Termodinamski procesi** obravnavata avtorja hladilne in



Slika 3. Ko potopimo epruveto v vodo (pri ves čas enaki temperaturi), se tlak zraka v epruveti poveča, prostornina pa zmanjša.

toplotne črpalke, toplotne stroje v praksi, naravo ireverzibilnosti in entropijo. Ker se veliko govori o možnosti življenja na Luni, navedimo še primer:

Prvi naseljenci na Luni bodo imeli poleg drugih težav tudi težave z vzdrževanjem primerne temperature v bivalnih prostorih. Vzemimo, da je povprečna dnevna temperatura na Luni +100 °C, povprečna nočna temperatura pa −100 °C in da je toplotni tok skozi stene tipičnega bivališča podan z enačbo

$$dQ/dt = 0{,}5\,\mathrm{kWK}^{-1} \cdot \Delta T,$$

kjer je ΔT temperaturna razlika med eno in drugo stranjo sten. Naseljenci vzdržujejo v bivalnih prostorih stalno temperaturo +20 °C s pomočjo reverzibilnih Carnotovih strojev. S kolikšno močjo morajo poganjati stroje a) podnevi in b) ponoči?

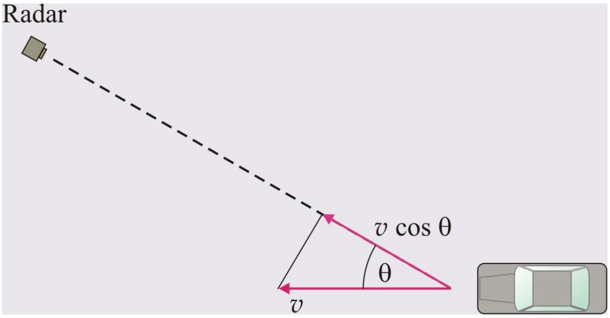
Poglavja **Fazne spremembe**, **Površinski pojavi** in **Prevajanje toplote** imajo zopet klasično vsebino, vendar vsebujejo nekaj zanimivih rešenih problemov z obsežnimi komentarji.

Zadnje poglavje **Valovanje** je najobsežnejše in obravnava različne vrste valovanj. Navedimo dva primera, ki se lahko povezujeta s problemi nekaterih voznikov:

1. Akustični radar deluje na enak način kakor običajni radar, le da uporablja namesto elektromagnetnega valovanja zvočno valovanje (slika 4). Določi hitrost vozila na osnovi izmerjene frekvence zvočnega valovanja.

Slika 4. Cestni radar: avtomobil vozi v smeri zveznice z radarjem.

2. Določi hitrost avtomobila na osnovi izmerjene frekvence zvočnega valovanja za primer na sliki 5.



Slika 5. Avtomobil vozi pod kotom θ glede na zveznico z radarjem.

Pisanje učbenikov ni posebej hvaležno delo. Po eni strani bi avtorji radi kar se da razumljivo razložili osnovne principe, po drugi strani pa to privede do *debelih* knjig. Avtorjema je uspelo obsežno snov predstaviti na 487 straneh. Nekatere razlage so klasične, saj drugače pri razlagah osnov tudi ne gre, druge, predvsem mehaniko in toploto ter del valovanja, avtorja temeljiteje obdelata in opišeta na način, ki sicer ni običajen, je pa naraven. Posebna odlika tega učbenika je množica dovolj natančno in nazorno izdelanih slik ter izčrpnih komentarjev ob zgledih. Besedilo je skrbno izbrano in tekoče berljivo, poglavja in podpoglavja so premišljeno razporejena in usmerjajo bralca k vrnitvi na ta ali oni komentar ali zakon, ki je potreben za nadaljnje razumevanje. Vsebino popestrijo tudi kratki zgodovinski dodatki. Po učbeniku bi lahko posegli tudi študentje naravoslovja (posebej fizike) in drugih tehničnih fakultet, v njem pa bi našel kaj zanimivega tudi radovedni bralec, ki pozna osnove diferencialnega računa.

Nada Razpet

VESTI

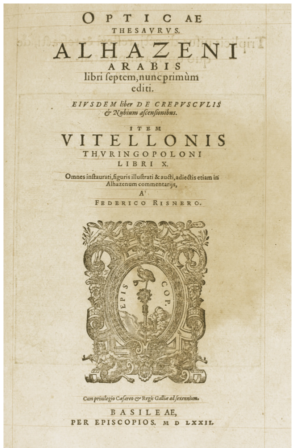
MEDNARODNO LETO SVETLOBE IN TEHNOLOGIJ, POVEZANIH S SVETLOBO

Generalna skupščina Združenih narodov je na svojem 68. zasedanju leto 2015 razglasila za mednarodno leto svetlobe in tehnologij, povezanih s svetlobo [1]. To naj javnost opozori na dosežke pri raziskovanju svetlobe in o velikem pomenu dosežkov pri tem za ljudi. Tehnologije na podlagi svetlobe dajejo upanje na vzdržni razvoj in ponujajo številne rešitve v energetiki, izobraževanju, kmetijstvu, prenosu podatkov in medicini.

Dejavnosti v mednarodnem letu svetlobe naj povečajo razumevanje svetlobe in njene uporabe v javnosti in razširijo zavest o velikem pomenu svetlobe in njene uporabe v modernem svetu. V leto 2015 padejo tudi pomembne obletnice, povezane z raziskovanjem svetlobe [2]:

- Knjiga o optiki Alhazena iz leta 1015;
- Opis svetlobe kot transverzalnega valovanja etra Augustina Fresnela iz leta 1815;
- teorija elektromagnetnega valovanja Jamesa Clerka Maxwella iz leta 1865;
- zaton etra ter svetlobni kvanti in opis fotoelektričnega pojava z njimi iz leta 1905 in obravnava svetlobe v kozmologiji v okviru splošne teorije relativnosti leta 1915 Alberta Einsteina;
- odkritje vesoljskega mikrovalovnega sevanja Arna A. Penziasa in Roberta W. Wilsona ter misel na svetlobne vodnike Charlesa Kaa iz leta 1965.

Abu Ali al-Hasan ibn al-Hajtam, Alhazen (965–1040), arabski naravoslovec in matematik, rojen v Basri, je *Knjigo o optiki* napisal v Kairu v letih od 1011 do 1021. Knjigo so prevedli v latinščino in prevod natisnili v Baslu leta 1572. Knjiga je veljala za osrednje optično besedilo in je močno vplivala na razvoj optike. Nekateri imajo Alhazena za »očeta sodobne optike«. Alhazen se je prvi odločno odvrnil od zamisli, da vidimo, ker nekaj izvira iz oči. S poskusi je ugotovil, da nekatera telesa oddajajo svetlobo in jo druga odbijajo. Raziskal je krogelno zbiralno zrcalo, opazil sferno aberacijo in ugotovil, da paraboloidno zrcalo nima te napake. Opisal je kamero obskuro in razmišljal o nastanku senc. Lomnega zakona ni poznal, ugotovil pa je, da razmerje med lomnim kotom in vpadnim kotom ni konstantno. Zagotovil je, da je hitrost svetlobe v gostejši snovi manjša kot v redkejši. Raziskal je delovanje očesa, a pri tem ni bil tako uspešen.



Augustin Fresnel (1788–1827), francoski inženir, je v razpravi, ki jo je leta 1815 predložil francoski akademiji, opisal poskuse s svetlobo in opozoril na prednosti valovne slike pred delčno. Pred tem je Thomas Young svetlobo pojasnil kot longitudinalno valovanje, ki potuje po etru z nemerljivo majhno gostoto tako, kot zvok potuje po zraku. Deli zraka nihajo v smeri potovanja in po zraku potujejo zgoščine in razredčine. Young je polarizacijo svetlobe pojasnil s transverzalnim valovanjem, ki je primešano longitudinalnemu. Fresnel je razvil opis svetlobe s transverzalnim valovanjem etra. Ni se ustrašil tega, da lahko tako valovanje potuje samo po trdni snovi. V obsežnem delu je izračunal bližnje uklonske slike na način, ki ga uporabljamo še dandanes.

James Clerk Maxwell (1831–1879), škotski fizik, si je prizadeval predstave Michaela Faradaya o električnih in magnetnih pojavih izraziti v matematičnem jeziku. To mu je uspelo v korakih. Najprej se je skliceval na podobnost električnih in magnetnih pojavov z mehaničnimi in termodinamičnimi pojavi. Nato je to dosegel nekoliko bolj urejeno s podobnostjo z enim samim pojavom, kar je poenotilo računanje. Naposled je leta 1865 v *Dinamični teoriji elektromagnetnega polja* zavrgel sklicevanje na podobnosti in vpeljal električno in magnetno polje kot samostojni koli-

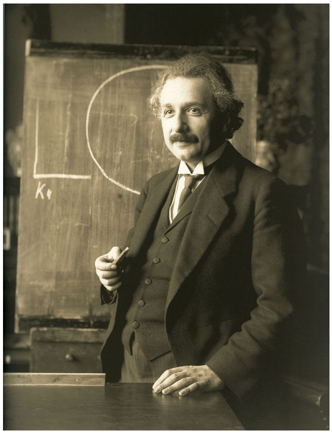
čini. S tem je optiko povezal z elektrodinamiko, medtem ko je bila dotlej bliže mehaniki.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

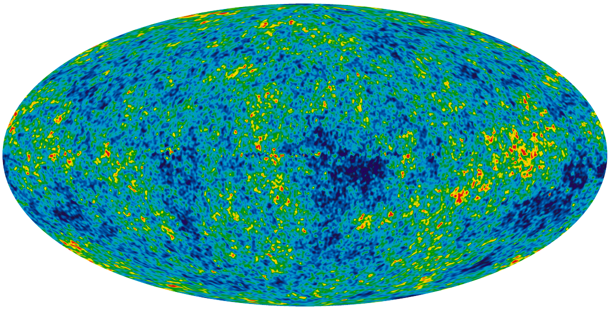
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

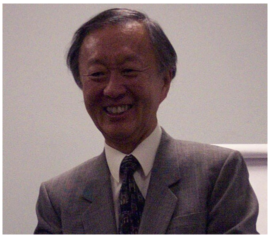


Albert Einstein (1879–1955) je v čudovitem letu 1905 v članku *O hevrističnem gledišču, ki zadeva nastanek in spremembo svetlobe* uvedel svetlobne kvante. Pet let prej je Max Planck pojasnil sevanje črnega telesa z zamislijo, da segreto telo z valovanjem v votlini energijo izmenjuje v obrokih, energijskih kvantih. Einstein je privzel, da kvanti tudi potujejo po vakuumu »ne da bi se delili, in jih je mogoče absorbirati ali izsevati samo kot celote«. Po tej poti je pojasnil fluorescenco, fotoelektrični pojav in ionizacijo plinov s svetlobo. Zapisal je enačbo za energijo elektronov, ki jih pri fotoelektričnem pojavu iz kovine izbije svetloba, v odvisnosti od frekvence svetlobe. Leta 1922 (za leto 1921) je dobil Nobelovo nagrado.

Ameriška astronoma Arno Penzias (1933) in Robert Wilson (1936) sta leta 1978 prejela Nobelovo nagrado za odkritje mikrovalovnega sevanja ozadja. To je termično sevanje, ki od vsepovsod iz vesolja dosega Zemljo in je nastalo ob začetku vesolja. Odkritje 1964 je bilo naključno, o njem pa sta poročala leta 1965. Sevanje ozadja je ključno za razumevanje razvoja vesolja. Prostor med zvezdami in galaksijami je z optičnimi teleskopi videti popolnoma črn, občutljive radijske antene pa zaznajo signal, ki ga ne moremo povezati z nobenim telesom in je v vseh smereh skoraj popolnoma enak. Spekter ima vrh v mikrovalovnem



delu in ustreza telesu, segretemu na slabe 3 K. Majhna odstopanja v jakosti svetlobe pričajo o najzgodnejših strukturah v vesolju.



Charles K. Kao (1933), v Hongkongu rojeni kitajski inženir, ki je delal v Angliji in Združenih državah, se je leta 1965 domislil, da bi svetlobo vodili po tankem vlaknu iz prozorne snovi. Pojav opazimo pri osvetljenih vodometih. Svetloba potuje po vodnih curkih in se s totalnim odbojem na meji odbije nazaj v vodni curek, če ta ni preveč ukrivljen. Sredi prejšnjega stoletja je pojav postal zanimiv za prenos sporočil. Sporočila je mogoče tem bolje prenašati, čim višja je frekvenca valovanja, s katerim jih prenašamo. Kao je predlagal »optični valovni vodnik«. Ugotovil je, da je za ta namen najprimernejši nekristalni kremen. Nekaj časa je trajalo, preden je uspelo izdelati vlakna iz dovolj čistega kremena, v katerem se je valovanje le malo oslabilo. Zdaj je vse površje Zemlje prepredeno s svetlobnimi kabli. K hitri razširitvi so prispevali odkritje polprevodniških laserjev in številne tehnične izboljšave. Leta 2009 je Kao dobil polovico Nobelove nagrade.

Dejavnosti v mednarodnem letu svetlobe koordinira Mednarodni center za teoretično fiziko v Trstu pod okriljem UNESCA. Z njimi naj bi:

- izboljšali razsvetljavo in dosegli boljšo kakovost življenja v razvitem in razvijajočem se svetu,
- zmanjšali svetlobno onesnaževanje in izgube energije,
- okrepili vlogo žensk v znanosti,
- spodbudili izobraževanje med mladimi in
- spodbudili trajnostni razvoj.

Na domači strani [3] si lahko ogledate vse podrobnosti v zvezi z mednarodnim letom svetlobe, najdete obilico gradiva in poiščete aktualne dogodke. Če sami načrtujete aktivnosti, povezane s svetlobo, ali pišete blog o tem, sporočite urednikom, da bodo to objavili na strani.

V Sloveniji dejavnosti koordinira dr. Matej Kobav z ljubljanske fakultete za elektrotehniko. Obvestila in vprašanja mu lahko pošljete na naslov `matej.kobav@fe.uni-lj.si`. Za Slovenijo aktualna obvestila so objavljena na spletni strani [4].

Mednarodnemu letu je prilagojena tudi tema letošnjega izobraževalnega seminarja DMFA Slovenije za učitelje fizike in naravoslovja [5], ki ga organiziramo v sodelovanju s Pedagoško fakulteto Univerze v Ljubljani. Seminar Poskusi s svetlobo je potekal v petek, 13. marca, popoldne, in v soboto, 14. marca 2015 na Pedagoški fakulteti, Kardeljeva ploščad 16, v Ljubljani. Drugo strokovno srečanje na to temo bo 25. in 26. septembra v Ljubljani na Fakulteti za matematiko in fiziko. Za podrobnejše informacije o tem srečanju spremljajte domačo stran društva `www.dmfa.si`.

LITERATURA

[1] `http://www.un.org/ga/search/view_doc.asp?symbol=A/68/440/Add.2` `http://www.light2015.org/dam/About/Resources/Resolution/Resolution_EN.pdf`, ogled: 3. 3. 2015.

[2] J. Strnad, *Mala zgodovina svetlobe*, (bo objavljeno v Proteusu).

[3] `http://www.light2015.org/Home.html`, ogled: 3. 3. 2015.

[4] `http://www.iyl2015.si/`, ogled: 3. 3. 2015.

[5] `https://www.dmfa.si/DMFA2015-PoskusiSSvetlobo.pdf`, ogled: 3. 3. 2015.

Aleš Mohorič

OB STOLETNICI ROJSTVA MARTINA GARDNERJA

Ameriški matematik Martin Gardner (1914–2010), avtor številnih knjig o razvedrilni matematiki, dolgoletni pisec znamenite rubrike *Mathematical Games* za revijo *Scientific American*, kateremu v poklon dandanes prirejajo srečanja *G4G* (*Gathering for Gardner*) in *Celebration of Mind*, je svojevrsten fenomen: čeprav ni imel skoraj nobene formalne matematične izobrazbe, se je v matematični skupnosti (pa tudi zunaj nje) prav v XX. stoletju, ko za amaterje in samouke v matematiki (vsaj raziskovalni) tako rekoč ni bilo več mesta, svetovno uveljavil kot briljanten pisec nekaj sto člankov in knjig s področja t. i. rekreativne, pa tudi resne matematike sodobnikov, ki mu jo je uspelo predstaviti na preprost, zanimiv, strokovno korekten in zabaven ter poučen način. Ker nas Gardner tukaj zanima predvsem kot matematik, samo kot zanimivost omenimo, da se je ljubiteljsko ukvarjal tudi s čarovniškimi triki in da je bil znan tudi kot avtor leposlovnih knjig in skeptični pisec o različnih filozofskih vprašanjih. Napisal je več kot sto knjig z različnih področij.

Med postajami na njegovi življenjski poti omenimo le najvažnejše, kot je npr. obiskovanje univerze v Chicagu, kjer je študiral filozofijo. Potem je šel v New York, postal svobodni pisatelj in se osem let preživljal s pisanjem ugank za otroški časopis *Humpty Dumpty.* Prelomnico v njegovi karieri je pomenil članek o heksafleksagonih, s katerim se je začelo njegovo 25-letno pisanje slavne rubrike »Mathematical Games« za revijo Scientific American.

Nekaj citatov sodobnikov o Martinu Gardnerju lepo osvetljuje njegovo osebnost in pomen njegovega dela: »Eden največjih intelektov proizvedenih v tej deželi v 20. stoletju« (Douglas Hofstadter), »Gardnerjev prispevek k sodobni intelektualni kulturi je enkraten – v svojem obsegu, svojem vpogledu, in razumevanju težkih vprašanj, ki so pomembna« (Noam Chomsky), »Pripeljal je več matematike k več milijonom kot kdorkoli drug« (Richard K. Guy).

V čem je skrivnost njegovega uspeha in izjemne priljubljenosti, ki prerašča v legendo? Česa se lahko od njega naučimo? Kako bi se splačalo raziskovati njegovo delo v prihodnje?

Gardner je raje govoril o drugih kot o sebi. Bil je skromen, zadržan, a velik zagovornik kritične misli in nasprotnik antiintelektualizma. V nekem intervjuju je izjavil, da je v svojem delu predvsem užival in da je imel še srečo, da je bil za to plačan. Svoje pomanjkljive matematične izobrazbe ni imel za slabost, saj je bil precej bister za matematiko in se je lahko sam naučil vsega, o čemer je pisal. Po lastnih besedah je imel najraje tiste svoje kolumne, v katerih so se prepletale matematične in filozofske teme. Bil je oster nasprotnik različnih »mejnih« znanosti, nasprotoval je npr. parapsihologiji, astrologiji, numerologiji, itd. Gardner je bil eden pionirjev na področju, ki ga bomo matematiki v prihodnosti morali vse bolje obvladovati: pojasnjevati javnosti, kaj delamo in zakaj je to zanimivo in pomembno. To je počel zelo dobro (navsezadnje je bil tudi pisatelj) in v tem smislu se ob prebiranju njegovih člankov in knjig lahko veliko naučimo. Svojih kolumen ni pisal po nikakršnem udobnem klišeju, pač pa je pazil, da se prispevki med seboj kolikor mogoče razlikujejo – tako po vsebini kot po slogu.

Imel pa je tudi srečo, da je bil kot že uveljavljeni pisec knjig in strasten ljubitelj matematike od dijaških let pripravljen to nišo zapolniti prav tedaj, ko se je pojavila (pronicljivi urednik Gerry Piel, navdušen nad Gardnerjevim člankom o »heksafleksagonih«, je opazil porast zanimanja javnosti za matematiko ob izidu obsežne Newmanove knjige *The World of Mathematics* v štirih delih, ki je nepričakovano postala uspešnica, in ga povabil k pisanju stalne rubrike za Scientific American). Kot je to skromno pojasnil in komentiral Gardner sam v intervjuju z Anthonijem Barcellosom za knjigo *People of Mathematics*: »Ostalo je zgodovina« (angl. »The rest is history«).

Predvsem nas Gardnerjeva življenjska pot uči, da talentiran samouk lahko tudi v matematiki najde svojo »nišo«, pa četudi le v obrobnem, od profesionalnih matematikov dostikrat podcenjevanem »getu« rekreativne matematike. Gardnerju je to uspelo ne le zato, ker je preprosto in zanimivo pisal o zahtevnih temah, ampak tudi zato, ker je zavestno izbiral takšna področja in teme s področja »rekreativne« matematike, ki so pomembne tudi za »glavni tok« sodobne matematike. Tako je po eni strani matematiko približal širši javnosti, po drugi strani pa samim matematikom osvetlil njihovo delo iz drugačnega, privlačnejšega zornega kota.

V Gardnerjevih člankih najdemo poleg obilice logičnih in drugih ugank, paradoksov, šahovskih problemov, trikov s kartami in drugega »železnega repertoarja« rekreativne matematike (ki ga je v veliki meri prav on pomagal izoblikovati!) tudi številne pomembne probleme iz diskretne matematike, kombinatorike, aritmetike, geometrije, topologije, logike, teorije števil, matematične teorije iger, teorije vozlov, teorije konfiguracij, itd. Gardnerju je uspelo premostiti na videz brezdanji prepad med rekreativno in resno matematiko, in to je morda njegova največja zasluga. Pokazal je, da tudi preprosti problemi rekreativne matematike vodijo k resnim in pomembnim problemom diskretne matematike, ki je po eni strani (po mnenju številnih sodobnih piscev) matematika prihodnosti, po drugi pa je vsaj na osnovni ravni dostopna tudi učencem in dijakom. Rešitve problemov je dostikrat pospremil tudi s poučnimi komentarji, ki bralcu pomagajo razumeti npr. tipične napake v mišljenju, vrednost ugank, ki terjajo izvirno razmišljanje zunaj običajnih konceptov, ki ga potrebujejo vsi resnično inovativni matematiki, ipd. Profesionalni matematik v njegovih delih sicer morda ne bo našel veliko takega, česar ne bi že vedel, se bo pa lahko veliko naučil o samem načinu, kako matematika dejansko nastaja. Ne pozabimo, da so cela matematična področja (npr. verjetnostni račun ali matematična teorija iger) dobila impulz za svoj nastanek prav iz obravnave problemov, ki bi jih matematiki tistega časa upravičeno lahko uvrstili v »rekreativno« matematiko. Rekreativna matematika torej ni neka »genetsko drugačna vrsta« matematike, ampak se v njenih na videz trivialnih in zabavnih problemih dostikrat skriva zametek nove, vznemirljive in tehtne matematične discipline, ki pa jo mora nekdo kot takšno šele opaziti in izumiti.

Pisci matematičnih učbenikov in oblikovalci nacionalnih kurikulov s področja matematike bi tudi v Gardnerjevih knjigah (kot tudi v knjigah drugih uveljavljenih piscev s področja razvedrilne matematike) lahko našli obilico materiala za oblikovanje privlačnih nalog in projektov, bolj povezanih z življenjem in razvojem sodobne matematike.

Cilj tega prispevka pa ni le informativen (poročilo o življenju in delu M. G.) in vrednotenjski (ocena vpliva in pomena M. G.), ampak tudi motivacijski – na tem vzorčnem primeru (»študiji primera M. G.«) lahko vidimo, da je preučevanje življenja in dela matematikov oziroma raziskovanje zgodovine matematike (celo t. i. rekreativne, ki sicer med matematiki ni zelo cenjena) zelo koristno tako za dijake in študente kot tudi za učitelje matematike in raziskovalce. Pomaga namreč tako pri razvijanju samih matematičnih sposobnosti (npr. reševanje problemov, spoznavanje metod reševanja problemov, zastavljanje novih problemov, itd.) kot tudi pri razvijanju veščin pisanja o matematiki (ki je matematikom, celo dobrim, dostikrat primanjkuje). Zato ni dvoma, da bo študij zgodovine matematičnih znanosti, ki se po svetu že vse bolj uveljavlja tudi kot doktorski študij, tudi pri nas prej ali slej pridobil ustrezno veljavo in podporo.

Več podatkov o življenju in delu Martina Gardnerja, ki je vsekakor vredno nadaljnjih raziskav, lahko zainteresirani bralec dobi npr. na spletnem naslovu `http://martin-gardner.org/`.

Jurij Kovič

SPOŠTOVANI UČITELJI MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOMIJE

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko vabita k sodelovanju na strokovnem srečanju in 67. občnem zboru, ki bosta 25. in 26. septembra 2015 na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani.

Matematični del strokovnega srečanja bo potekal skupno s tradicionalnim seminarjem za učitelje matematike, ki poteka na Fakulteti za matematiko in fiziko. Vodilna tema fizikalnega dela strokovnega srečanja pa je posvečena mednarodnemu letu svetlobe. Potekala bo tudi astronomska delavnica.

K sodelovanju vabimo vse učitelje in člane DMFA, da predstavijo svoje izkušnje in ideje:

- v obliki krajših predstavitev;
- v obliki plakatov;
- v obliki krajših delavnic.

Vabimo tudi študente matematike, fizike in astronomije, da predstavijo svoje dosežke.

Predavateljem bodo na voljo internet, projekcijsko platno in projektor. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj.

Prosimo vas, da nam prispevke pošljete do **20. avgusta 2015** na naslov `nada.razpet@fmf.uni-lj.si`.

Prijave morajo vsebovati:

- naslov prispevka,
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domači naslov (ni obvezno) in elektronski naslov,
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12pt naj ne presega 10 vrstic),
- predlagano trajanje predstavitve.

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora.

Vsa obvestila v zvezi z občnim zborom in strokovnim srečanjem bomo sproti objavljali na domači strani DMFA: `http://www.dmfa.si`.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Matej Brešar

OBVESTILO

V Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik 49, št. 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA, www.dmfa.si/pravilniki/Pravilnik_Drustvena-Priznanja.html je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) v skladu s tem pravilnikom za letošnja priznanja pošljete do **20. avgusta 2015** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, Jadranska ul. 19, 1000 Ljubljana**.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Matej Brešar

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2015
Letnik 62, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Leto 2015 je mednarodno leto svetlobe in tehnologij, povezanih s svetlobo.