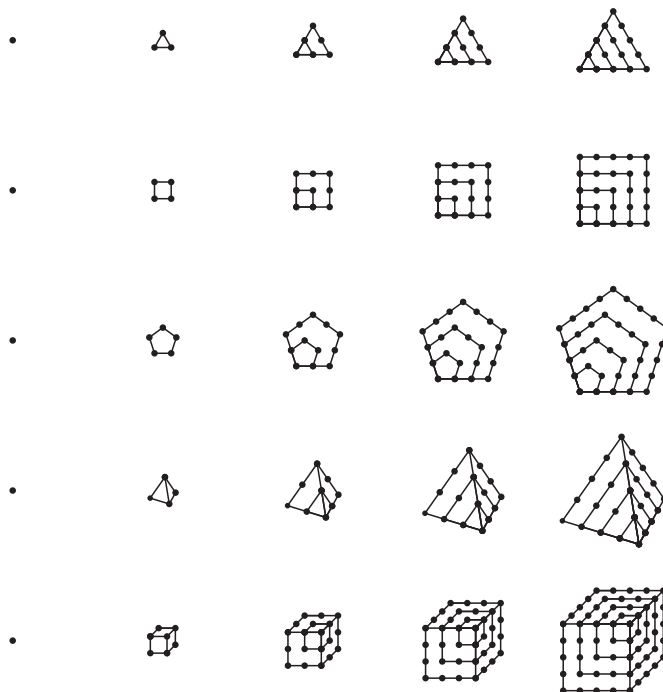


OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2019, letnik 66, številka 6, strani 201–240

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** info@dmfa-zaloznistvo.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2019 DMFA Slovenije – 2113

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

OD INTEGRALOV DO OGRLIC¹

BARBARA DRINOVEC DRNOVŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 26-01, 26A42

V članku obravnavamo nalogo, ki so jo reševali madžarski študenti matematike na memorialnem tekmovanju Miklós Schweitzer.

FROM INTEGRALS TO NECKLACES

In the paper we consider a problem which was given to Hungarian students of mathematics at the Miklós Schweitzer Memorial Competition.

Uvod

Madžarsko matematično društvo od leta 1949 organizira memorialno tekmovanje Miklós Schweitzer, ki je namenjeno študentom matematike na Madžarskem. Naloge na tem tekmovanju so zahtevne, študenti jih rešujejo 10 dni, pri reševanju pa smejo uporabljati kakršno koli literaturo. Naloge sodijo v različna matematična področja, ki jih študenti spoznajo na univerzitetnem in magistrskem študiju: algebra, analiza, geometrija, kombinatorika, operatorska teorija, teorija množic, teorija števil, topologija, verjetnost in druga [7]. Objavljene so na spletu [8] ter v knjižni obliki z rešitvami [2, 5].

V članku bomo obravnavali nalogo iz leta 1995:

Naloga 1. *Naj bosta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[0, 1]$, za kateri velja*

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = 1.$$

Pokaži, da obstaja tak interval $I \subset [0, 1]$, da velja

$$\int_I f(x) dx = \int_I g(x) dx = \frac{1}{2}.$$

V. Totik je v članku [6] napisal sedem različnih študentskih rešitev zgornje naloge iz analize z uporabo zelo različnih matematičnih rezultatov, ki segajo na področja kombinatorike, geometrije in topologije. Predstavili bomo

¹Del članka je avtorica predstavila udeležencem Seminarja za učitelje matematike UL FMF dne 20. 9. 2019.

dve rešitvi naloge 1, spoznali bomo problem ogrlice in ga s pomočjo naloge rešili ter predstavili njeno ekvivalentno formulacijo.

V nalogi lahko uporabimo katero koli od običajnih definicij integrabilnosti: Riemannovo, Lebesguovo ali Riemann-Stieltjesovo.

Če v nalogi vzamemo $f = g$, potem iz integrabilnosti funkcije f sledi, da je integral kot funkcija zgornje meje, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, zvezna funkcija na intervalu $[0, 1]$. Zato funkcija F doseže vse vrednosti med $F(0) = 0$ in $F(1) = 1$, torej doseže tudi vrednost $\frac{1}{2}$, tj. obstaja $x \in [0, 1]$, za katerega velja $F(x) = \frac{1}{2}$ in interval $I = [0, x]$ reši nalogo.

Z uvedbo nove spremenljivke enostavno izpeljemo, da lahko interval $[0, 1]$ zamenjamo z drugim zaprtim intervalom. Če vrednosti obeh integralov v predpostavki zamenjamo z $a \in \mathbb{R}$, potem je treba v zaključku $\frac{1}{2}$ zamenjati z $\frac{a}{2}$.

Nalogo je dovolj rešiti za kakšno gosto podmnožico integrabilnih funkcij, npr. za zvezne funkcije ali za stopničaste funkcije: denimo, da sta funkciji f in g limitni funkciji zaporedij $(f_n)_n$ in $(g_n)_n$, torej da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |g(x) - g_n(x)| dx = 0,$$

in denimo, da velja

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 g_n(x) dx = 1.$$

Če je naloga rešljiva za funkciji f_n in g_n , potem obstajata števili a_n in b_n , $0 \leq a_n < b_n \leq 1$, za kateri velja

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} g_n(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Ker sta zaporedji $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ omejeni, obstajata konvergentni podzaporedji $(a_{n_k})_k$ in $(b_{n_k})_k$ z limitama a in b . Z upoštevanjem pravila o aditivnosti domene in trikotniške neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx - \int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f_{n_k}(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f(x) dx - \int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f_{n_k}(x) dx + \int_a^{a_{n_k}} f(x) dx + \int_{b_{n_k}}^b f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - f_{n_k}(x)| dx + \int_a^{a_{n_k}} |f(x)| dx + \int_{b_{n_k}}^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Vsi trije členi v vsoti konvergirajo proti 0, ko pošljemo k proti neskončno, zato velja

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f_{n_k}(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Ker enak sklep velja za funkcijo g , je interval $I = [a, b]$ rešitev naloge za funkciji f in g .

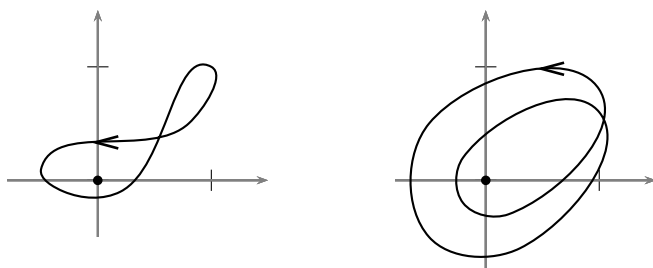
Rešitev z uporabo ovojnega števila

Ovojno število orientirane sklenjene krivulje v ravnini, ki ne vsebuje izhodišča, prešteje, kolikokrat krivulja obkroži izhodišče. Če je krivulja gladka, ovojno število določimo tako, da preštejemo, kolikokrat krivulja orientirano preseka poltrak skozi izhodišče, ki krivuljo seka transversalno.

Formalno ovojno število definiramo takole: Naj bo $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ zvezna preslikava, za katero velja $\gamma(a) = \gamma(b)$. Potem je njena zaloga vrednosti $\gamma(I)$ orientirana sklenjena krivulja v ravnini. Točko $\gamma(t)$ zapišemo v polarnem zapisu z $r(t)$ in $\varphi(t)$, pri čemer velja $\gamma(t) = (r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t))$. Spomnimo se, da točka $\gamma(t)$ določa polarni kot $\varphi(t)$ do večkratnika 2π natančno. Ker je γ zvezna preslikava, lahko s pravilno izbiro tega večkratnika dosežemo, da je funkcija φ zvezna na intervalu $[a, b]$. Ker je $\gamma(a) = \gamma(b)$, je razlika $\varphi(b) - \varphi(a)$ celoštevilski večkratnik števila 2π . *Ovojno število* γ je

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}.$$

Iz zapisanega sledi, da je ovojno število preslikave γ celo število. Natančno definicijo ovojnega števila in izpeljavo njegovih osnovnih lastnosti najdemo v [4].



Slika 1. Krivulji z ovojnimima številoma 1 in 2.

Naj bo V zvezno vektorsko polje na $D \subset \mathbb{R}^2$ in $K \subset D$ orientirana enostavno sklenjena krivulja, tj. orientirana sklenjena krivulja brez samopresečišč. Izberimo zvezno parametrizacijo $\gamma: [a, b] \rightarrow K$ krivulje K , ki določa dano orientacijo. Če V nima ničel na K , je *ovojno število zožitve V na K* ovojno število preslikave $V \circ \gamma$ in ni odvisno od izbire parametrizacije γ . Ovojno število zožitve zveznega vektorskega polja V na K prešteje, kolikokrat se V zasuka okrog izhodišča, ko potujemo po K v izbrani smeri.

Izrek 2. *Naj bo $V: \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezno vektorsko polje na zaprtem enotskem disku, ki nima ničel na robu $b\bar{\mathbb{D}}$. Če je ovojno število zožitve V na $b\bar{\mathbb{D}}$ neničelno, potem ima V ničlo na \mathbb{D} .*

Dokaz. Denimo, da V nima ničle na \mathbb{D} . Za $r \in [0, 1]$ definiramo $\gamma_r(t) = V(re^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Potem je γ_r parametrizacija orientirane sklenjene krivulje v ravnini, ki ne gre skozi izhodišče. Ovojno število γ_r je zvezno odvisno od parametra r in ima vrednosti v \mathbb{Z} , zato je konstantno. Ker je ovojno število γ_0 enako 0, je ovojno število γ_r enako 0 za vse $r \in [0, 1]$, kar je v nasprotju s predpostavko. Dokazali smo, da ima V ničlo na \mathbb{D} . ■

Rešitev naloge z uporabo izreka o ovojnem številu: S T označimo trikotnik $\{(x, y): 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Zvezno vektorsko polje $U: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiramo s predpisom

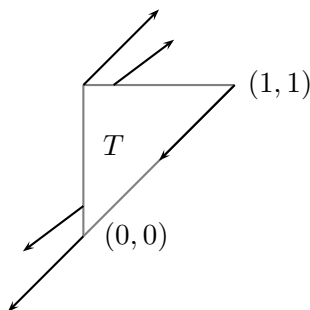
$$U(x, y) = \left(\int_x^y f(t) dt - \frac{1}{2}, \int_x^y g(t) dt - \frac{1}{2} \right).$$

Če je $(x, y) \in T$ ničla vektorskega polja U , potem interval $I = [x, y]$ reši nalogo.

Ker je trikotnik T homeomorfen zaprtemu enotskemu disku $\bar{\mathbb{D}}$, lahko uporabimo izrek 2: Če vektorsko polje U na bT nima ničle, potem ima U ničlo v notranjosti T , čim ima U na bT neničelno ovojno število. Za $t \in [0, 1]$ po definiciji U izračunamo $U(t, t) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in

$$U(0, t) + U(t, 1) = (0, 0). \quad (1)$$

Od tod ocenimo ovojno število U na bT : Iz točke $(0, 0)$ potujemo po robu bT v pozitivni smeri. Vektorsko polje U je na diagonali konstantno. Zasuk U vzdolž horizontalne stranice od $U(1, 1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ do $U(0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je π do celoštevilskega večkratnika 2π natančno, kajti vektorja sta si nasprotno enaka. Iz (1) sledi, da je zasuk U vzdolž vertikalne stranice, ko nadaljujemo potovanje v pozitivni smeri, enak zasuku U vzdolž horizontalne stranice, ko potujemo v pozitivni smeri (glej sliko 2). Polarna kota se seštejeta, torej je zasuk vektorskega polja U vzdolž bT enak 2π do celoštevilskega večkratnika 4π natančno, zato je ovojno število $U|_{bT}$ neničelno. S tem smo rešili nalogo.



Slika 2. Primer vektorskega polja U na bT .

Rešitev z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka

Izrek 3. Naj bo $T: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava iz n razsežne enotske sfere. Potem obstaja točka $x \in \mathbb{S}^n$, za katero velja $T(x) = T(-x)$. Če je preslikava T liha, potem velja $T(x) = T(-x) = 0$.

Borsuk-Ulamov izrek v posebnem primeru pove, da obstajata antipodni točki na ekvatorju z enako temperaturo in antipodni točki na Zemlji, ki imata enako temperaturo in enak zračni tlak. Dokaz bomo izdelali v primeru $n = 1$, splošen primer pa je bil obravnavan v Obzorniku [3].

Dokaz. Funkcijo $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo s predpisom $f(x) = T(e^{ix})$. Funkcija f je zvezna in velja $f(0) = f(2\pi)$. Zvezno funkcijo $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo s predpisom $g(x) = f(\pi + x) - f(x)$. Izračunamo $g(0) = f(\pi) - f(0)$ in $g(\pi) = f(2\pi) - f(\pi) = f(0) - f(\pi) = -g(0)$. Bodisi je $g(0) = 0$ ali pa je g v krajišjih intervala nasprotno predznačena, zato ima ničlo. Za ničlo x funkcije g velja $0 = g(x) = T(e^{ix+i\pi}) - T(e^{ix}) = T(-e^{ix}) - T(e^{ix})$. Našli smo antipodni točki na \mathbb{S}^1 , v katerih T doseže enako vrednost. ■

Rešitev naloge z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka: Za $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ naj bo

$$X_f(x, y, z) = \operatorname{sgn} x \int_0^{x^2} f(t) dt + \operatorname{sgn} y \int_{x^2}^{x^2+y^2} f(t) dt + \operatorname{sgn} z \int_{x^2+y^2}^1 f(t) dt,$$

pri čemer smo s sgn označili funkcijo predznak, ki pozitivnemu številu in ničli priredi 1, negativnemu številu pa -1 . Če so vse komponente točke $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ neničelne, potem je X_f zvezna v točki (x, y, z) , ker je integral zvezna funkcija svojih mej, funkcija predznak pa je v neničelnih točkah

zvezna. Če je ena od komponent točke $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ enaka 0, potem ustrezna funkcija sgn sicer ni zvezna v 0, vendar je omejena in je pomnožena z zvezno funkcijo, ki ima v 0 vrednost 0, zato je ustrezní člen v vsoti zvezna funkcija. S tem smo dokazali, da je X_f zvezna funkcija na \mathbb{S}^2 .

Preslikavo $T: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiramo s predpisom

$$T(x, y, z) = (X_f(x, y, z), X_g(x, y, z)).$$

Ker sta funkciji X_f in X_g zvezni in lihi, je preslikava T zvezna in liha, zato ima po Borsuk-Ulamovem izreku ničlo. Označimo jo z $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Med števili \bar{x} , \bar{y} in \bar{z} imata natanko dve enak predznak: če bi bila vsa tri enako predznačena, bi po predpostavki o f sledilo, da je $X_f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \{-1, 1\}$, kar pa ni res. Če imata \bar{y} in \bar{z} enak predznak, potem velja $\int_0^{\bar{x}^2} f(t) dt = \int_{\bar{x}^2}^1 f(t) dt$ in $\int_0^{\bar{x}^2} g(t) dt = \int_{\bar{x}^2}^1 g(t) dt$. Ker je $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 g(t) dt = 1$, sledi, da za I lahko vzamemo $[0, \bar{x}^2]$. Podobno premislimo, da če imata \bar{x} in \bar{z} enak predznak, lahko vzamemo $I = [\bar{x}^2, \bar{x}^2 + \bar{y}^2]$, če pa imata \bar{x} in \bar{y} enak predznak, lahko vzamemo $I = [\bar{x}^2 + \bar{y}^2, 1]$. S tem smo rešili nalogo.

Problem ogrlice

Problem 4. *Pirata imata ogrlico, na kateri je v naključnem vrstnem redu nanizanih $2k$ belih in $2k$ črnih biserov. Določi najmanjše število rezov, s katerimi ogrlico pravično razdelimo med pirata.*

Iščemo torej najmanjše število rezov, s katerimi razrežemo ogrlico in nato vsakemu od piratov damo natanko k belih in k črnih biserov. Z rešitvijo naloge bomo dokazali, da sta dovolj dva reza. Rešitev problema ogrlice se da izpeljati tudi direktno iz Borsuk-Ulamovega izreka [1].

Izberemo biser na ogrlici in ga indeksiramo z 1, nato se premikamo po ogrlici v pozitivni smeri. Zaporedju belih in črnih biserov priredimo funkciji $f, g: [0, 4k] \rightarrow \mathbb{R}$ takole: če je m -ti biser bel, naj bo

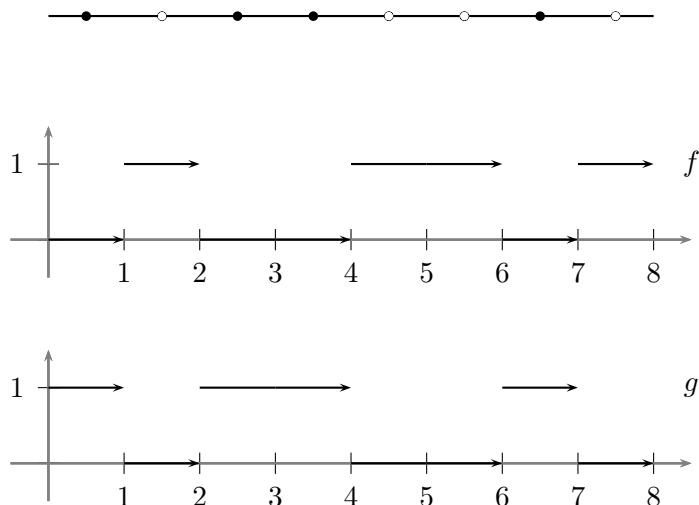
$$f|[m-1, m] \equiv 1 \text{ in } g|[m-1, m] \equiv 0,$$

sicer pa

$$f|[m-1, m] \equiv 0 \text{ in } g|[m-1, m] \equiv 1.$$

Integral funkcije f po intervalu s celoštevilskima krajiščema prešteje bele bisere na ustreznem delu ogrlice, integral g pa prešteje črne bisere. Zato velja $\int_0^{4k} f(t) dt = \int_0^{4k} g(t) dt = 2k$. Rešitev naloge zagotavlja obstoj intervala $I \subset [0, 4k]$, za katerega velja: $\int_I f(t) dt = \int_I g(t) dt = k$.

Od integralov do ogrlic



Slika 3. Primer ogrlice in prirejenih funkcij f in g .

Če ima I celoštevilski krajišči, potem integral f po I prešteje število belih, integral g po I pa prešteje število črnih biserov, torej lahko ogrlico pravično razdelimo z dvema rezoma.

Denimo, da je $I = [a, b]$, kjer je $a = \lfloor a \rfloor + \alpha$ in $b = \lfloor b \rfloor + \beta$, pri čemer je vsaj eden od $\alpha, \beta \in [0, 1)$ neničeln. Sledi, da je $\alpha = \beta$, sicer vsaj eden od integralov po I ni naravno število. Podobno sklepamo, da je $f(a) = f(b)$ in $g(a) = g(b)$. V tem primeru velja $\int_I f(t) dt = \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor b \rfloor} f(t) dt$ in $\int_I g(t) dt = \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor b \rfloor} g(t) dt$, torej je na intervalu $[\lfloor a \rfloor, \lfloor b \rfloor]$ natanko k belih in k črnih biserov.

Ekvivalentna trditev

Trditev 5. *Dva igralca mečeta kovanec. Če pade cifra, igralec dobi en evro, sicer izgubi en evro. Denimo, da sta oba igralca v nekem časovnem intervalu dobila $2n$ evrov. Potem obstaja časovni interval, v katerem sta oba dobila n evrov.*

Dokazali bomo, da sta trditev 5 in naloga 1 ekvivalentni.

Najprej pokažimo, kako trditev 5 izpeljemo iz naloge. Recimo, da sta oba igralca dobila $2n$ evrov po k metih kovanca. Zaporedju metov prvega

igralca priredimo funkcijo $f: [0, k) \rightarrow \mathbb{R}$ takole: če je pri m -tem metu padla cifra, naj bo $f|[m-1, m) \equiv 1$, sicer pa $f|[m-1, m) \equiv -1$. Zaporedju metov drugega igralca priredimo funkcijo g na enak način. Integral funkcije f po intervalu s celoštevilskima krajiščema je dobiček oziroma izguba prvega igralca v ustreznem času. Zato velja $\int_0^k f(t) dt = \int_0^k g(t) dt = 2n$. Rešitev naloge zagotavlja obstoj intervala $I = [a, b]$, za katerega velja $\int_I f(t) dt = \int_I g(t) dt = n$.

Če sta a in b celi števili, potem smo dobili ustrezeni časovni interval. Sicer lahko zapišemo $a = [a] + \alpha$ in $b = [b] + \beta$, kjer je vsaj eno od števil $\alpha, \beta \in [0, 1)$ neničelno.

- Če $\alpha \neq \beta$, potem vsaj eden od integralov funkcij f in g po I ni celo število, kar je protislovje.
- Če je $\alpha = \beta \neq \frac{1}{2}$, potem sta integrala funkcij f in g po I lahko celoštevilski samo v primeru, ko je $f(a) = f(b)$ in $g(a) = g(b)$. V tem primeru velja $\int_I f(t) dt = \int_{[a]}^{[b]} f(t) dt$ in $\int_I g(t) dt = \int_{[a]}^{[b]} g(t) dt$, torej je $[[a], [b]]$ ustrezeni časovni interval.
- Denimo, da je $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Potem velja bodisi $f(a) = f(b)$ in $g(a) = g(b)$ bodisi $f(a) \neq f(b)$ in $g(a) \neq g(b)$, kajti sicer bi bil en integral lih, drugi pa sod. V prvem primeru lahko ponovimo sklep iz prejšnje točke, v drugem primeru pa velja: $\int_I f(t) dt = \int_{[a]+1}^{[b]} f(t) dt$ in $\int_I g(t) dt = \int_{[a]+1}^{[b]} g(t) dt$, torej smo v obeh primerih dobili ustrezeni časovni interval.

Dokazali smo, da trditev 5 sledi iz naloge 1.

Dokažimo še obratno: denimo, da trditev 5 drži. Nalogo 1 je dovolj dokazati za zvezni funkciji f in g , ki ustrezata predpostavki. Ker sta zvezni, sta omejeni, torej obstaja $M \in \mathbb{R}$, da velja $|f(x)| \leq M$ in $|g(x)| \leq M$ za vse $x \in [0, 1]$. Funkciji

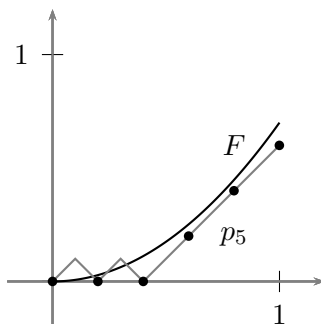
$$F(x) = \frac{1}{M} \int_0^x f(t) dt \text{ in } G(x) = \frac{1}{M} \int_0^x g(t) dt$$

sta zvezno odvedljivi in velja $F'(x) = \frac{1}{M} f(x)$ ter $G'(x) = \frac{1}{M} g(x)$. Zato veljata oceni $|F'(x)| \leq 1$ in $|G'(x)| \leq 1$ za vse $x \in [0, 1]$. V nadaljevanju bomo dokazali, da lahko funkciji F in G enakomerno poljubno dobro aproksimiramo z zveznima kosoma linearnima funkcijama, ki imata enaki vrednosti v 0 in 1 ter imata na vsakem linearnem delu naklon 1 ali -1 .

Naj bo $m \in \mathbb{N}$. Za vsak $l \in \{0, 1, \dots, m\}$ obstaja natanko en $j \in \mathbb{Z}$, za katerega velja $F(\frac{l}{m}) \in [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m})$ in definiramo $p_m(\frac{l}{m}) = \frac{j-1}{m}$. Po

Lagrangeevem izreku velja $|F(x + \frac{1}{m}) - F(x)| = \frac{1}{m}|F'(c)| \leq \frac{1}{m}$ za neki $c \in [x, x + \frac{1}{m}]$, od tod sledi $p_m(\frac{l+1}{m}) - p_m(\frac{l}{m}) \in \{-\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}\}$ za vsak $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Definiramo še

$$p_m(\frac{2l+1}{2m}) = \begin{cases} p_m(\frac{l}{m}) + \frac{1}{2m}, & p_m(\frac{l+1}{m}) \geq p_m(\frac{l}{m}) \\ p_m(\frac{l}{m}) - \frac{1}{2m}, & p_m(\frac{l+1}{m}) < p_m(\frac{l}{m}) \end{cases}.$$



Slika 4. Aproximacija funkcije F s kosoma linearno funkcijo p_5 .

Za vse $l \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$ velja $|p_m(\frac{l+1}{2m}) - p_m(\frac{l}{2m})| = \frac{1}{2m}$, zato lahko p_m razširimo do zvezne kosoma linearne funkcije na $[0, 1]$, ki ima na vsakem linearnem delu naklon ± 1 . Za vsak $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ in za vsak $x \in [\frac{l}{m}, \frac{l+1}{m}]$ z uporabo trikotniške neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} |F(x) - p_m(x)| &\leq |F(x) - F(\frac{l}{m})| + |F(\frac{l}{m}) - p_m(\frac{l}{m})| + |p_m(\frac{l}{m}) - p_m(x)| \\ &\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m}, \end{aligned} \quad (2)$$

pri čemer smo pri oceni prvega člena upoštevali, da je $|F'| \leq 1$, pri drugem in tretjem členu pa ocena velja po definiciji funkcije p_m . Na enak način funkciji G priredimo funkcijo q_m . Ker imata F in G v krajišjih intervala $[0, 1]$ enaki vrednosti, imata p_m in q_m v krajišjih intervala $[0, 1]$ enaki vrednosti.

Funkciji p_m priredimo izide $2m$ metov kovanca za prvega igralca takole: če je naklon p_m na intervalu $[\frac{l}{2m}, \frac{l+1}{2m}]$ enak 1, je rezultat cifra, sicer grb. Na enak način funkciji q_m priredimo izide metov drugega igralca. Ker je $p_m(0) = q_m(0)$ in $p_m(1) = q_m(1)$, igralca po $2m$ metih dobita enako. Ker je število metov sodo, je njun dobiček sodo število $2n$. Z uporabo trditve 5 dobimo časovni interval $[a_m, b_m]$, v katerem sta oba igralca dobila n evrov. Na tem intervalu sta oba igralca vrgla enako cifer (in enako grbov), njun dobiček na tem intervalu pa je bil enak polovičnemu dobičku na koncu, zato

velja

$$p_m(b_m) - p_m(a_m) = q_m(b_m) - q_m(a_m) = \frac{1}{2}(p_m(1) - p_m(0)).$$

Po definiciji funkcije F velja

$$\int_0^1 f(x) dx = M(F(1) - F(0)) = M(p_m(1) - p_m(0) + o_1),$$

pri čemer z uporabo ocene (2) dobimo $|o_1| < \frac{6}{m}$. Podobno izpeljemo

$$\int_{a_m}^{b_m} f(x) dx = M(F(b_m) - F(a_m)) = M(p_m(b_m) - p_m(a_m) + o_2),$$

kjer je $|o_2| < \frac{6}{m}$. Sedaj izračunamo

$$\begin{aligned} \int_{a_m}^{b_m} f(x) dx &= M(p_m(b_m) - p_m(a_m) + o_2) = \frac{1}{2}M(p_m(1) - p_m(0)) + Mo_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2}Mo_1 + Mo_2 = \frac{1}{2} + Mo_3, \end{aligned}$$

kjer je $|o_3| < \frac{9}{m}$. Podobno velja za G in q_m . Sedaj nadaljujemo podobno kot v začetku uvodnega razdelka: v omejenih zaporedjih $(a_m)_m$ in $(b_m)_m$ obstajata konvergentni podzaporedji in za njuni limiti a in b velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Torej smo rešili nalogo.

LITERATURA

- [1] N. Alon in D. B. West, *The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 623–628.
- [2] *Contests in higher mathematics* (Hungary, 1949–1961). In memoriam Miklós Schweitzer, (G. Szasz, L. Geher, I. Kovacs, L. Pinter, eds), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
- [3] K. Kelvišar, *Borsuk-Ulamov izrek*, Obzornik Mat. Fiz. **63** (2016), 41–52.
- [4] R. Narasimhan in Y. Nievergelt, *Complex analysis in one variable*, Second edition. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
- [5] G. J. Szekely (Ed.), *Contests in Higher Mathematics*, Springer, New York, 1996.
- [6] V. Totik, *A tale of two integrals*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), 227–240.
- [7] *Miklós Schweitzer Competition*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Mikl%C3%B3s_Schweitzer_Competition, ogled 22. 11. 2019.
- [8] *Problems of the Miklós Schweitzer Memorial Competition*, dostopno na www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/schweitzer/, ogled 22. 11. 2019.

KONGRUI VEČKOTNIŠKIH ŠTEVIL

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta

Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11D09

Kongruum je tako naravno število N , za katerega obstajajo naravna števila x , y in z , za katera velja $y^2 - x^2 = z^2 - y^2 = N$. Pokazali bomo, da lahko pojem kongrua posplošimo, če kvadrate v definiciji ustrezno zamenjamo z večkotniškimi števili.

CONGRUA OF POLYGONAL NUMBERS

Congruum is a positive integer N , for which there exist positive integers x , y , and z such that $y^2 - x^2 = z^2 - y^2 = N$. We will show that the concept of congruum can be generalized by replacing squares in the definition by the corresponding polygonal numbers.

Uvod

Besedo *kongruum* je v matematiko vpeljal Leonardo iz Pise (1170–1250) v svoji knjigi *Liber quadratorum*, ki jo je dokončal leta 1225 in je prevedena tudi v angleščino. Njen prevod [2] je opremljen s številnimi opombami in komentarji. Latinska beseda *congruus* pomeni *soglasen, skladen, primeren, prikladen*. V *Liber quadratorum* obravnava Leonardo nekatere probleme, ki so povezani s kvadrati naravnih in racionalnih števil. Eden od teh je tudi *problem kongrua*, ki je bil v Leonardovem času že zelo star, saj je že antični matematik Diofant v 3. stoletju v svoji knjigi *Aritmetika* obravnaval podobne probleme, kasneje pa tudi perzijska matematika Al Hazin (900–971) in Al Karadži (953–1029). Po Leonardu so se s problemom spopadali še drugi, na primer Pierre de Fermat (1607–1665) in Leonhard Euler (1707–1783). Problem še do danes ni v celoti rešen.

Naravno število N je *kongruum*, če obstajajo naravna števila x , y in z , pri čemer je $x < y < z$, tako da veljata relaciji

$$x^2 + N = y^2, \quad y^2 + N = z^2. \quad (1)$$

Če iz zgornjih enačb izločimo N , dobimo enačbo $x^2 + z^2 = 2y^2$, iz katere sklepamo, da sta x in z iste parnosti.

Pri tem se poraja glavno vprašanje. Ali pri danem N naravna števila x , y in z , ki zadoščajo enačbama v (1), sploh obstajajo in kako jih učinkovito najti? Izkaže se, da ni vsako naravno število kongruum. Že Leonardo

iz Pise je v [2] dokazal, da nobeno kvadratno število ni kongruum. Dokaz ni ravno preprost. Najdemo ga na primer v [3] pod iztočnico *Kongruenčna števila*. Slovenski avtorji si pri tem niso enotni: nekateri uporabljajo pridevnik *kongruenčen*, nekateri pa *kongruenten*.

Do kongruov hitro pridemo s pitagorejskimi trojicami (a, b, c) , kjer so a, b in c naravna števila, $a < b$ in $a^2 + b^2 = c^2$. Števili a in b sta kateti, c pa hipotenuza ustreznega pravokotnega trikotnika. Uporabimo enakosti, ki sledita iz zadnje relacije:

$$(b - a)^2 + 2ab = c^2, \quad c^2 + 2ab = (b + a)^2. \quad (2)$$

Za $x = b - a, y = c, z = b + a$ in $N = 2ab$ sta izpolnjeni relaciji (1).

Na ta način dobimo vse kongrue. Če je namreč N kongruum, obstajajo naravna števila x, y, z , pri čemer je $x < y < z$, tako da veljata enačbi (1). Trojica $(a, b, c) = ((z - x)/2, (z + x)/2, y)$ je pitagorejska, ker velja

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(z^2 + x^2) = \frac{1}{2}(y^2 + N + y^2 - N) = y^2 = c^2.$$

Za pitagorejsko trojico (a, b, c) pa očitno veljata enačbi (2).

Za najmanjšo pitagorejsko trojico $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ dobimo $x = 1, y = 5, z = 7$ in $N = 24$. Res veljata enakosti

$$1^2 + 24 = 5^2 \quad \text{in} \quad 5^2 + 24 = 7^2.$$

Pitagorejska trojica (a, b, c) je *primitivna*, če števila a, b in c nimajo skupnega faktorja. V primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) je eno od števil a in b liho, eno sodo, število c pa je vedno liho. Primitivne pitagorejske trojice (a, b, c) generiramo z dvema naravnima številoma p in q s formulami

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq, \quad c = p^2 + q^2,$$

kjer sta si p in q tuji števili različnih parnosti ter $p > q$. Če se pri tem zgodi, da je $a > b$, števili a in b med seboj preprosto zamenjamo. Vsaka pitagorejska trojica je produkt neke primitivne z nekim naravnim številom (glej na primer [4]).

Hitro pa vidimo, da je za vsako naravno število λ število $\lambda^2 N$ kongruum, če je le N kongruum. Že Leonardo iz Pise pa je v [2] dokazal, da je število 24 najmanjši kongruum in da je vsak kongruum deljiv s 24. Slednje je ugotovil z obravnavo števila $N = 2ab$ v (2), ki ga je vzel v razstavljeni obliki $N = 4pq(p - q)(p + q)$.

Neskončno zaporedje kongruov se začne s

$$24, 96, 120, 216, 240, 336, 384, 480, 600, 720, 840, 864.$$

Kongrue dobimo s formulo $N = 2\lambda^2 ab$ z vstavljanjem katet a in b primitivnih pitagorejskih trojic (a, b, c) in naravnimi števili λ . Kot smo že videli, je 24 kongruum, zato je kongruum tudi $96 = 2^2 \cdot 24$.

Primer 1. Pitagorejska trojica $(5, 12, 13)$ nam zaradi enakosti (2) da kongruum $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$, in sicer za $x = 7, y = 13$ in $z = 17$, kar nam prinese

$$7^2 + 120 = 13^2 \quad \text{in} \quad 13^2 + 120 = 17^2.$$

Omenimo še *kongruentna števila*. Naravno število M je *kongruentno*, če obstajajo pozitivna racionalna števila x, y in z , pri čemer je $x < y < z$, tako da veljata relaciji

$$x^2 + M = y^2, \quad y^2 + M = z^2.$$

Enakovredna definicija sloni na relacijah (2). Naravno število M je kongruentno, če obstaja pravokotni trikotnik z racionalnimi stranicami in ploščino M . Kongruentna števila so v tesni zvezi z eliptičnimi krivuljami. Več o tem lahko preberemo na primer v [5].

Vsak kongruum je kongruentno število, vsako kongruentno število pa ni kongruum, pač pa je produkt nekega kongruuma s kvadratom nekega pozitivnega racionalnega števila. Neskončno zaporedje kongruentnih števil se začne s

$$5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28.$$

Kongruentna števila dobimo prav tako kot kongrue N , ki jih delimo z njihovimi največjimi možnimi kvadratnimi faktorji.

Primer 2. Pitagorejska trojica $(9, 40, 41)$ nam da kongruum $N = 2 \cdot 9 \cdot 40 = 720 = 12^2 \cdot 5$, zato je $M = 5$ kongruentno število. Za $x = 31, y = 41$ in $z = 49$ veljata po (2) enakosti

$$31^2 + 720 = 41^2 \quad \text{in} \quad 41^2 + 720 = 49^2.$$

Če ju delimo z 12^2 , dobimo

$$\left(\frac{31}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{41}{12}\right)^2 \quad \text{in} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

To je neposredni dokaz, da je 5 kongruentno število. Rezultat je poznal že Leonardo iz Pise in ga uporabil na matematičnem tekmovanju leta 1225 v prisotnosti cesarja Friderika II.

Večkotniška števila

Večkotniška (mnogokotniška, poligonalna) števila $V_n^{(k)}$ so povezana s pravilnimi k -kotniki in sestavljajo pri izbranem k neskončno številsko zaporedje, ko n teče po naravnih številih. Zato številom $V_n^{(k)}$ pravimo k -kotniška števila. Uvedemo jih kot n -te delne vsote aritmetičnega zaporedja s prvim členom 1 in diferenco $d = k - 2$ (glej na primer [1, 3]). Kot je znano, je

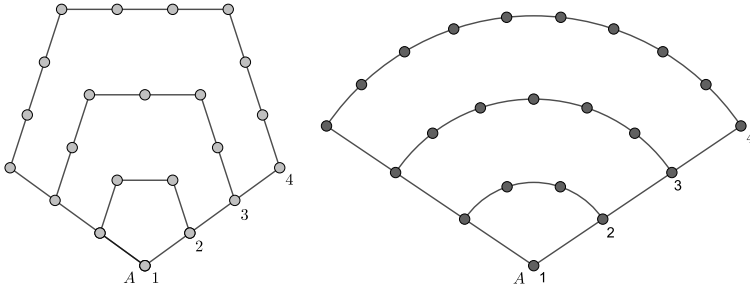
n -ti člen takega zaporedja enak $1 + (n - 1)(k - 2)$. Vsota prvih n členov pa je enaka produktu aritmetične sredine prvega in zadnjega člena s številom členov, torej

$$V_n^{(k)} = \frac{n}{2}(2 + (n - 1)(k - 2)). \quad (3)$$

V posebnih primerih dobimo za $k = 3$ trikotniška števila T_n , za $k = 4$ kvadratna Q_n in za $k = 5$ petkotniška P_n :

$$T_n = V_n^{(3)} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad Q_n = V_n^{(4)} = n^2, \quad P_n = V_n^{(5)} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Večkotniška števila $V_n^{(k)}$ za $n > 1$ klasično ponazorimo kot število točk v ogliščih in na stranicah $n - 1$ pravilnih k -kotnikov v skupni ravnini. Pri tem njihove stranice naraščajo v aritmetičnem zaporedju. Vsi k -kotniki imajo skupno oglišče A , iz A izhajajoči stranici pa ležita na skupnih poltrakih s krajiščem v A . Oglišča mnogokotnikov označimo z debelejšo točko, nato na stranice znotraj kota med poltrakoma dodamo toliko takih točk, da bo število točk na vseh stranicah posameznih k -kotnikov enako. Število vseh točk take figure je $V_n^{(k)}$. Pri tem je $V_1^{(k)} = 1$ in $V_2^{(k)} = n$ za vsak $k \geq 3$. Na sliki 1 levo je predstavljeno četrto petkotniško število. Številke na sliki pomenijo, do kod je treba prešteti točke, da dobimo ustrezno petkotniško število. Prva štiri petkotniška števila so 1, 5, 12, 22.



Slika 1. Klasična in pahljačasta predstavitev števila $P_4 = 22$.

Večkotniška števila lahko ponazorimo tudi *pahljačasto*. Vzamemo poltraka s skupnim krajiščem A . Poltraka naj oklepata primerno velik kot. Nato v tem kotu med poltrakoma načrtamo krožne loke s središčem v A , njihove polmere pa izberemo v aritmetičnem zaporedju. Na prvi lok in na poltraka v enakih razdaljah naneseemo $1 + (k - 2)$ točk, na drugega $1 + 2(k - 2)$, ..., na n -tega $1 + n(k - 2)$ točk. Vseh točk, skupaj z A , na taki figuri je

ravno $V_n^{(k)}$. Na sliki 1 desno je pahljačasto predstavljeno četrto petkotniško število.

Z večkotniškimi števili so se ukvarjali že pitagorejci, v 1. in 2. stoletju Nikomah iz Gerase, v 3. stoletju Diofant iz Aleksandrije, kasneje pa tudi Fermat, Euler, Lagrange, Cauchy in drugi.

V nadaljevanju članka uporabljamo pahljačasto predstavitev večkotniških števil, ki jo je za večje k lažje izdelati z računalnikom kot klasično, v kateri uporabimo pravilne k -kotnike.

Kvadratna števila x^2, y^2 in z^2 nastopajo v (1), to je v definiciji kongrua. Sedaj pa v relacijah (1) nadomestimo kvadratna števila u^2 z večkotniškimi $V_u^{(k)}$ za $u \in \{x, y, z\}$ in $k \geq 3$, pri čemer so x, y in z naravna števila, za katera je $x < y < z$. Število N pa nadomestimo z nekim naravnim številom $N^{(k)}$. Dobimo relaciji

$$V_x^{(k)} + N^{(k)} = V_y^{(k)}, \quad V_y^{(k)} + N^{(k)} = V_z^{(k)}. \quad (4)$$

Če taka naravna števila x, y, z in $N^{(k)}$ obstajajo, bomo število $N^{(k)}$ imenovali *k-kongruum*. Običajni kongrui so 4-kongrui, ki smo jih definirali v Uvodu. Videli smo, da le-ti obstajajo. Zastavlja se seveda vprašanje, ali obstajajo k -kongrui za vse $k \geq 3$. Za $3 \leq k \leq 12$ se da ob pomoči računalnika neposredno ugotoviti, da obstajajo.

Predpostavimo, da naravna števila x, y, z in $N^{(k)}$ v (4) obstajajo. Potem se relaciji (4) z upoštevanjem formule (3) izražata takole:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}(2 + (k - 2)(x - 1)) + N^{(k)} &= \frac{y}{2}(2 + (k - 2)(y - 1)), \\ \frac{y}{2}(2 + (k - 2)(y - 1)) + N^{(k)} &= \frac{z}{2}(2 + (k - 2)(z - 1)). \end{aligned}$$

Če ju preuredimo in odpravimo ulomke, dobimo enakovredni relaciji

$$\begin{aligned} (2(k - 2)x - (k - 4))^2 + 8(k - 2)N^{(k)} &= (2(k - 2)y - (k - 4))^2, \\ (2(k - 2)y - (k - 4))^2 + 8(k - 2)N^{(k)} &= (2(k - 2)z - (k - 4))^2. \end{aligned}$$

Ker je $k \geq 3$ in $x \geq 1$, so števila

$$X = 2(k - 2)x - (k - 4), \quad Y = 2(k - 2)y - (k - 4), \quad Z = 2(k - 2)z - (k - 4)$$

in

$$M^{(k)} = 8(k - 2)N^{(k)}$$

naravna in zadoščajo sistemu diofantskih enačb

$$X^2 + M^{(k)} = Y^2, \quad Y^2 + M^{(k)} = Z^2.$$

Pri tem je $X < Y < Z$ in $M^{(k)}$ običajni kongruum. Če izločimo $M^{(k)}$ iz zgornjih enačb, dobimo diofantsko enačbo

$$X^2 + Z^2 = 2Y^2.$$

Enačba ima trivialno rešitev $X = Y = Z = n$ za vsako celo število n . Ta ne pride v poštev. Vemo pa tudi, da morata biti X in Z iste parnosti. Enačbo pomnožimo na obeh straneh z 2 in jo zapišemo v obliki

$$(Z - X)^2 + (Z + X)^2 = (2Y)^2.$$

To pa pomeni, da morajo števila $Z - X$, $Z + X$, $2Y$ sestavljati pitagorejsko trojico. Zato obstaja primitivna pitagorejska trojica (a, b, c) , kjer je $a < b$ in $a^2 + b^2 = c^2$, in naravno število λ , tako da velja zveze

$$Z - X = \lambda a, \quad Z + X = \lambda b, \quad 2Y = \lambda c.$$

Ker je v primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) število c vedno liho število, mora biti λ sodo število: $\lambda = 2\mu$. Število μ je naravno. Potemtakem lahko zapišemo

$$Z - X = 2\mu a, \quad Z + X = 2\mu b, \quad Y = \mu c.$$

Iz prvih dveh enačb izrazimo X in Z . Zapišimo po vrsti:

$$X = \mu(b - a), \quad Y = \mu c, \quad Z = \mu(b + a).$$

To so naravna števila. Ustrezni kongruum je

$$M^{(k)} = Y^2 - X^2 = \mu^2(c^2 - (b - a)^2) = 2\mu^2 ab,$$

ki je tudi naravno število. Nazadnje imamo

$$x = \frac{\mu(b - a) + k - 4}{2(k - 2)}, \quad y = \frac{\mu c + k - 4}{2(k - 2)}, \quad z = \frac{\mu(b + a) + k - 4}{2(k - 2)}. \quad (5)$$

Tu pa nastane težava, ker števila x, y in z niso vedno naravna.

Da dobimo rešitev problema, je treba izbrati primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ tako, da bodo x, y in z naravna števila. Pripomnimo, da so $b - a, b + a$ in c liha števila. Za k -kongruum $N^{(k)}$ dobimo preprost izraz

$$N^{(k)} = \frac{\mu^2 ab}{4(k - 2)}. \quad (6)$$

Število $M^{(k)} = 8(k - 2)N^{(k)} = 2\mu^2 ab$ je običajni kongruum.

Pogoj, da je $8(k - 2)N$ kongruum, je zato potreben pogoj, da je naravno število N k -kongruum. Pogoj pa ni zadosten. Število 12 ni 3-kongruum,

čprav je $8 \cdot 12 = 96$ kongruum, saj je $2^2 + 96 = 10^2$ in $10^2 + 96 = 14^2$. Če bi število 12 bilo 3-kongruum, bi morala veljati relacija (6), to je $\mu^2 ab/4 = 12$ oziroma $\mu^2 = 48/(ab)$, pri čemer je μ naravno število, a in b pa tuji si kateti primitivnega pitagorejskega trikotnika. To pomeni $a \geq 3, b \geq 4$ in $ab \leq 48$. V poštev pride samo $a = 3$ in $b = 4$, kar nam da $\mu = 2$ in po (5) necele x, y in z . Zato 12 ni 3-kongruum.

Primeri

Iskanja k -kongruov si ne moremo zamisliti brez uporabe ustreznih računalniških programov. Napisati je treba program, ki nam bo iskal pri danem k naravna števila x, y in z po zgoraj razvitih formulah. Generiranje primitivnih pitagorejskih trojic (a, b, c) s parametroma p in q ne dela težav. V program vključimo tudi parameter μ . Vse tri parametre spreminjamo do neke, morda precej visoke vrednosti, in prej ali slej nam le uspe najti naravna števila x, y in z . To je sicer groba metoda, ki pa nam za manjše k le da rezultate. Oglejmo si nekaj izbranih primerov.

1. Za trikotniška števila T_n je 3-kongruum $T = N^{(3)} = \mu^2 ab/4$ in pri naravnih številih x, y, z , kjer je $x < y < z$, mora veljati

$$T_x + T = T_y, \quad T_y + T = T_z.$$

Za neko primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ morajo biti števila

$$x = \frac{\mu(b-a)-1}{2}, \quad y = \frac{\mu c-1}{2}, \quad z = \frac{\mu(b+a)-1}{2},$$

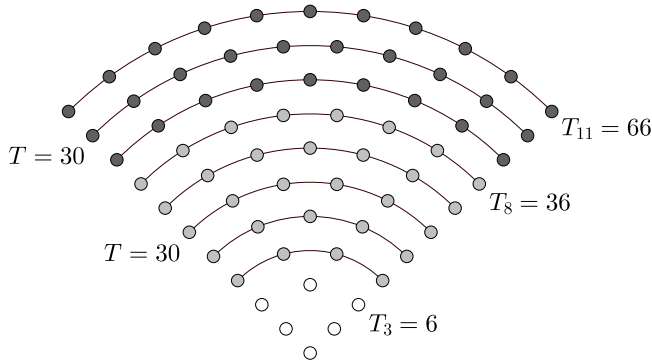
ki jih dobimo iz (5), naravna. Faktor μ mora biti liho število. Za primitivno pitagorejsko trojico $(a, b, c) = (8, 15, 17)$ in $\mu = 1$ dobimo $x = 3, y = 8, z = 11$ in $T = 30$. Število $8T = 240$ je običajni kongruum. Grafično ponazoritev predstavlja slika 2. Slika tudi ponazarja, kako bi v grškem antičnem gledališču lahko posedli 30 v rdeče in 30 v modro oblečenih oseb, pri čemer število sedežev z višino narašča za 1, pri tem pa v rdeče oblečene osebe polno zasedajo nekaj zaporednih vrst, takoj za njimi pa v modro oblečene osebe polno zasedajo nekaj nadaljnjih zaporednih vrst.

Do takega problema pridemo tudi, če v zaporedju naravnih števil iščemo števila

$$x + 1, x + 2, \dots, y; y + 1, y + 2, \dots, z,$$

za katera velja

$$(x + 1) + (x + 2) + \dots + y = (y + 1) + (y + 2) + \dots + z.$$



Slika 2. $T_3 + 30 = T_8$, $T_8 + 30 = T_{11}$.

Najmanjši tak primer je $1, 2; 3$ za $x = 0, y = 2$ in $z = 3$, ker je $1 + 2 = 3$. Ta izjema je v skladu s 3-kongruom, če privzamemo, da je $T_0 = 0$.

Za pitagorejsko trojico (a, b, c) , v kateri je $b - a = 1$, je lahko x katerokoli naravno število ali 0. Za $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ vzamemo $\mu = 2x + 1$ in dobimo $y = 5x + 2$ in $z = 7x + 3$. Ustrezni 3-kongruum je $T = 3(2x + 1)^2$. Prav tako za $(a, b, c) = (20, 21, 29)$ za $\mu = 2x + 1$ dobimo 3-kongruum $T = 105(2x + 1)^2$ in $y = 29x + 14$ ter $z = 41x + 20$. Števila $8T$ so, kot smo že videli, običajni kongrui. To se pravi, da so števila $24(2x + 1)^2$ in $840(2x + 1)^2$ običajni kongrui.

Opazimo, da je v teh primerih 3-kongruum T deljiv s 3. Ni pa težko dokazati, da je vsak 3-kongruum deljiv s 3. Neskončno zaporedje 3-kongruov se začne s $3, 15, 27, 30, 42, 75, 90, 105, 135, 147, 165, 243, 252$.

2. Za kvadratna števila Q_n je 4-kongruum $Q = N^{(4)} = \mu^2 ab/8$ in pri naravnih številih x, y, z , kjer je $x < y < z$, mora veljati

$$Q_x + Q = Q_y, \quad Q_y + Q = Q_z.$$

Za neko primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ morajo biti števila

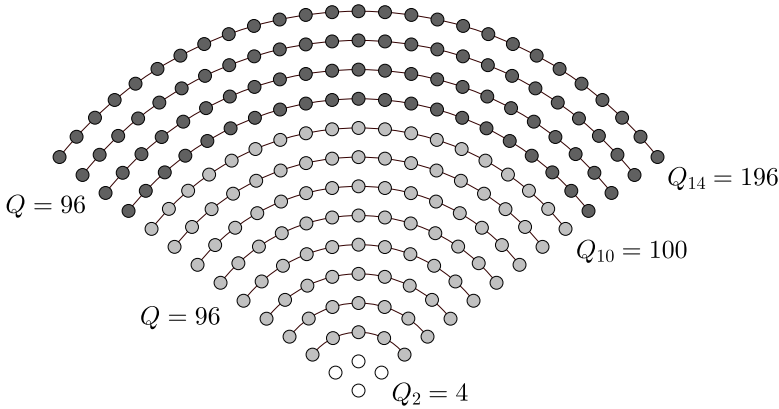
$$x = \frac{\mu(b - a)}{4}, \quad y = \frac{\mu c}{4}, \quad z = \frac{\mu(b + a)}{4},$$

ki jih dobimo iz (5), naravna. Faktor μ mora biti deljiv s 4. Za primitivno pitagorejsko trojico $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ in $\mu = 8$ dobimo $x = 2, y = 10, z = 14$ in $Q = 96$. Grafično ponazoritev predstavlja slika 3.

3. Za petkotniška ali pentagonalna števila P_n je 5-kongruum $P = N^{(5)} = \mu^2 ab/12$ in pri naravnih številih x, y, z , kjer je $x < y < z$, mora veljati

$$P_x + P = P_y, \quad P_y + P = P_z.$$

Kongrui večkotniških števil

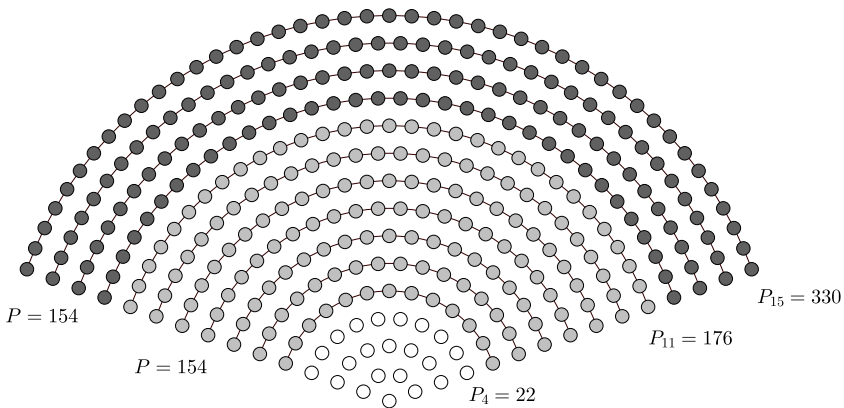


Slika 3. $Q_2 + 96 = Q_{10}$, $Q_{10} + 96 = Q_{14}$.

Za neko primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ morajo biti števila

$$x = \frac{\mu(b-a)+1}{6}, \quad y = \frac{\mu c+1}{6}, \quad z = \frac{\mu(b+a)+1}{6},$$

ki jih dobimo iz (5), naravna. Faktor μ mora biti liho število. Za primitivno pitagorejsko trojico $(a, b, c) = (33, 56, 65)$ in $\mu = 1$ dobimo $x = 4, y = 11, z = 15$ in $P = 154$, ki je najmanjši 5-kongruum. Običajni kongruum je število $24P = 3696$. Grafično ponazoritev predstavlja slika 4.



Slika 4. $P_4 + 154 = P_{11}$, $P_{11} + 154 = P_{15}$.

4. Tako lahko nadaljujemo s kongrui v nedogled. Za primere vzemimo šestkotniška ali heksagonalna števila $V_n^{(6)} = n(2n - 1)$, sedemkotniška ali heptagonalna števila $V_n^{(7)} = n(5n - 3)/2$, osemkotniška ali oktagonalna števila $V_n^{(8)} = n(3n - 2)$, devetkotniška ali eneagonalna števila $V_n^{(9)} = n(7n - 5)/2$, desetkotniška ali dekagonalna števila $V_n^{(10)} = n(4n - 3)$, enajstkotniška ali hendekagonalna števila $V_n^{(11)} = n(9n - 7)/2$ in dvanajstkotniška ali dodekagonalna števila $V_n^{(12)} = n(5n - 4)$. V tabeli navajamo po en primer za $4 \leq k \leq 12$. Dobljeni so ob pomoči računalnika. Več primerov bi zahtevalo veliko daljši članek.

k	(a, b, c)	(x, y, z)	μ	$N^{(k)}$
4	(3,4,5)	(1,5,7)	4	24
5	(33,56,65)	(4,11,15)	1	154
6	(20,21,29)	(1,22,31)	6	945
7	(65,72,97)	(1,10,14)	1	234
8	(33,56,65)	(8,22,30)	4	1232
9	(133,156,205)	(2,15,21)	1	741
10	(88,105,137)	(11,86,121)	10	28875
11	(279,440,521)	(63,203,280)	7	167090
12	(95,168,193)	(15,39,53)	4	6384

Za konec

Problemi v zvezi s k -kongrui so približno enaki kot s klasičnimi kongrui. Ali obstajajo k -kongrui za vsa naravna števila od 3 naprej? Katera števila so k -kongrui? Kako jih učinkovito najti? Kako poiskati ustrezna števila x, y in z ? Ali imajo k -kongrui neko uporabnost?

Za najvztrajnejše pa še splošna naloga. Za naraščajoče aritmetično zaporedje $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ z diferenco d , kjer so a_k naravna števila, izdelajte metodo za iskanje indeksov x, y in z ($x < y < z$), za katere velja enakost

$$a_{x+1} + a_{x+2} + \dots + a_y = a_{y+1} + a_{y+2} + \dots + a_z.$$

LITERATURA

- [1] E. Deza in M. Deza, *Figurate numbers*, World Scientific, Hackensack (NJ) 2012.
- [2] L. P. Fibonacci, *The book of squares*, Academic Press, Boston in drugje 1987. Prevod L. E. Sigler.
- [3] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2008.
- [4] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.
- [5] I. Vidav, *Eliptične krivulje in eliptične funkcije*, DMFA – založništvo, Ljubljana 1991.

DETERMINISTIČNI MODEL EPIDEMIJE

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

Ključne besede: epidemija, deterministični model, model SIR

Prispevek opisuje najpreprostejši model širjenja epidemije v populaciji. Opisane so glavne značilnosti modela in virusa ter primerjave z aktualno epidemijo virusa SARS-CoV-2.

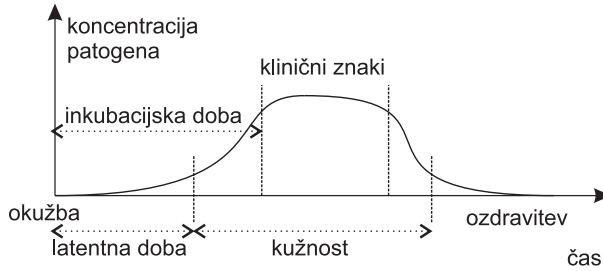
DETERMINISTIC MODEL OF EPIDEMY

Article describes the simplest model of epidemic spread. Basic properties of the model are demonstrated on the case of the current SARS-CoV-2 epidemic.

Ob izbruhu virusa SARS-CoV-2 in z njim povezane bolezni Covid-19 smo postali pozorni na širjenje virusnih bolezni. Pri tem mediji omenijo nekaj lastnosti, kot so inkubacijska doba, kužnost, nalezljivost, smrtnost in podobno. Kaj so ti podatki in kaj nam povedo o širjenju bolezni? In še pomembnejše vprašanje: zakaj smo med epidemijo primorani v karanteno?

Epidemije

To poglavje lahko preskočite, če vas definicije pojmov dolgočasijo. Okužba se začne, ko v osebo prodrejo kužni (patogeni) organizmi (npr. virusi, bakterije, glive, paraziti) in se začnejo razmnoževati. Razširjenost patogena v telesu je odvisna od odziva telesa in od patogena samega, saj nekateri ne povzročajo simptomov. Imunski sistem telesa se na okužbo lahko odzove in patogen uniči, takrat telo kaže klinične znake bolezni. Okužbo prepoznamo po kliničnih znakih ali pa tako, da dokažemo prisotnost z laboratorijskim testom, v katerem v kliničnem vzorcu npr. osamimo virus, odkrijemo nukleinsko kislino virusa, ali pa dokažemo prisotnost specifičnih protiteles proti virusu. Bolezen je nalezljiva, če se patogeni lahko prenašajo od bolnega na zdravega in nekateri patogeni se širijo hitreje, imajo večjo nalezljivost (infektivnost, kužnost). Nalezljivost patogeni izzovejo preko bolezenskih mehanizmov, npr. kašljanje, kihanje, krvavenje, pri čemer se patogeni nahajajo v npr. izkašljanih kapljicah, usedajo se lahko na površino in od vrste patogena ter okoliščin, v katerih se nahaja, je odvisno, koliko časa preživijo v okolju brez gostitelja. Od okužbe do pojava kliničnih znakov poteče inkubacijska doba (slika 1), kužnost (sposobnost prenašanja patogenov na druge) pa se lahko pojavi že prej, ko od vnosa patogena preteče latentna doba.



Slika 1. Tipičen potek okužbe: po vnosu patogena se ta razvija v telesu. V latentni fazi oseba še ni kužna. Po inkubacijski dobi se ob dovolj visoki koncentraciji patogena pojavijo klinični znaki bolezni.

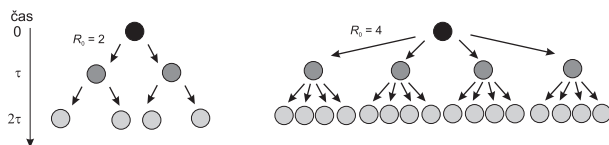
Bolezen se širi zaradi prenašanja patogenov od okuženih na zdrave osebe, kar v določeni populaciji beležimo z incidenco ali pojavnostjo, to je s številom novih primerov bolezni v določenem obdobju (npr. en dan). Prevalenca, razširjenost ali pogostost pomeni število vseh bolnikov v populaciji v času opazovanja (npr. na določen datum). Pojem obolevnost ali morbiditeta pomeni število bolnikov v populaciji v določenem obdobju. S sledenjem incidence izražamo dinamiko bolezni, zaradi česar je osnovni kazalec dinamike epidemije. Epidemija je pojavljanje določene bolezni z veliko incidenco v določeni populaciji. Posledice epidemije opišemo z obolevnostjo (morbidnost), ki je delež bolnikov v populaciji, smrtnostjo (letalnost), ki je število ali delež umrlih (od vseh zbolelih), in umrljivostjo (mortaliteta), ki je delež umrlih od populacije v določenem časovnem obdobju. Incidenco opiše rastna ali epidemična krivulja, v kateri prepoznamo štiri glavne zaporedne faze: latentno, eksponentno, stacionarno in fazo umirjanja. Eksponentno fazo opišemo s konstanto specifične hitrosti rasti oz. s konstanto eksponentne hitrosti rasti ali inverzno vrednostjo podvojitvenega časa.

Modeli širjenja epidemije

V najbolj preprostem modelu začetek epidemije opišemo s številom novih bolnikov, ki jih okuži en oboleli, in časom, v katerem se okužba prenese na naslednjo generacijo obolelih. Število označimo z R_0 , čas pa s τ . Če z x označimo kvocient t/τ , bo za N_0 okuženih ob $x = 0$, število okuženih ob $x = 1$ enako $R_0 N_0$. Ko x zraste na dva, se število okuženih poveča za $R_0^2 N_0$, bolezen se širi in število obolelih ob času $t = n\tau$ je $N = \sum_{x=0}^n R_0^x N_0$ (slika 2). V primeru, da bolniki ozdravijo po času $t = x_z \tau$, bomo število obolelih izračunali iz $N = \sum_{x \geq n-x_z} R_0^x N_0$.

Če epidemiologi dovolj dobro opravijo svoje detektivsko delo, najdejo indeksni primer, prvega bolnika ob času, v katerem je $N_0 = 1$. S sledenjem

Deterministični model epidemije



Slika 2. Naraščanje števila obolelih pri epidemiji je povezano s povprečnim številom oseb, ki jih okuži bolnik.

vseh kontaktov prvega bolnika, ki jih dovolj zgodaj izolirajo, se epidemija lahko zaustavi na začetku. Če nadzor ni učinkovit, epidemija izbruhne in celotno območje se izolira – uvede se karantena. Število ogroženih je omejeno s številom oseb v karanteni (pri predpostavki, da se okužba iz te množice ne razširi drugam). Število okuženih znotraj izolirane populacije po dovolj dolgem času ne narašča več eksponentno, temveč opazimo nasičenje, saj začne zmanjkovati ogroženih. Prevalenco opiše krivulja nasičenja, incidenca pa ima zvonasto porazdelitev. Ko pade epidemična krivulja na nič, je epidemija končana.

Dejansko prenos okužbe seveda ne poteka tako enostavno. Procesi prenosa so naključni, posamezni bolniki okužijo več ogroženih, drugi spet manj. Zato parametre iz prejšnjega opisa razumemo kot neke povprečne vrednosti, katerih vrednosti se lahko tudi spremenijo z ukrepi, ki jih v uvedemo za ustavitve epidemije.

Epidemijo opišemo z različnimi modeli, ki lahko napovedo njen potek [11]. Modeli temeljijo na nekaterih predpostavkah in parametrih. S temi parametri lahko merimo učinkovitost ukrepov npr. karantene ali množičnega cepljenja. Modeliranje lahko pomaga zdravstvenemu sistemu pri izbiri ustreznih ukrepov. Prvi, ki je uporabil matematični model širjenja bolezni, je bil Daniel Bernoulli [1], matematik in fizik, ki ga morda še najbolj poznamo po Bernoullijevi enačbi, ki povezuje gostoto kinetične ter potencialne energije s tlakom na tokovnici. Bernoulli je proučeval demografske podatke iz poljskega Wroclawa o okužbah in številu umrlih zaradi črnih koz, ki jih je zbral Edmund Halley (po njem je imenovan komet). To je bila bolezen, ki je med otroki takrat predstavljala enega največjih vzrokov smrtnosti, bila pa je že v endemični fazi, to pomeni, da se obolevnost populacije ni spreminjala. Z analizo smrtnosti in primerjavo z modelom, ki je upošteval število preživelih brez okužbe, je Bernoulli utemeljeval smiselnost preventivnega cepljenja.

Predpostavke modelov določajo njihovo uporabnost. Med njimi so npr. predpostavke o številnosti generacij in pričakovani življenjski dobi. Najbolj preprost model privzame, da je število oseb v vsaki generaciji enako. Naslednja predpostavka je npr. predpostavka o homogenem mešanju, kar pomeni, da so vse osebe populacije v medsebojnem stiku na podoben način.

Seveda so možna odstopanja, npr. podmnožica najstnikov, ki se bolj družijo med sabo, ali bolj odročne skupine, pripadniki geta in podobno.

V grobem delimo modele na stohastične in deterministične. V stohastičnih modelih pripišemo posameznim izidom verjetnostne porazdelitve in iščemo ujemanje z dejanskim potekom z variacijo nekaterih ključnih parametrov. V determinističnih modelih posameznike v populaciji razdelimo v podskupine, ki predstavljajo določeno fazo epidemije. Hitrost prehoda iz ene skupine v drugo izrazimo z ustrezno diferencialno enačbo. Velikost populacije v posamezni skupini je časovna spremenljivka in proces epidemije je determinističen, torej je sprememba populacije podskupine podana z njeno preteklostjo in določena s parametri modela.

Bazično reprodukcijsko število R_0 je merilo za to, kako nalezljiva je bolezen. V grobem pomeni povprečno število ljudi, ki jih okuži ena kužna oseba v času svoje kužnosti. To število določa, ali obolenost narašča eksponentno, $R_0 > 1$, ostaja konstantna, endemična, $R_0 = 1$, ali pa upada, $R_0 < 1$. S frekvenco prenosa β , to je število ogroženih, ki jih v časovni enoti okuži en bolnik, in dobo kužnosti bolne osebe $1/\gamma$ izrazimo reprodukcijsko število kot $R_0 = \beta/\gamma$. Pri tem privzamemo, da se vsak iz populacije lahko okuži z enako verjetnostjo. Nalezljivost lahko zmanjšamo tako, da zmanjšamo pogostost stikov (s karanteno, omejitvijo gibanja), verjetnost prenosa patogena (zaščitne rokavice, maske) ali pa skrajšamo dobo kužnosti (tako da bolnike izoliramo).

Model SIR

V preprostem determinističnem modelu SIR razdelimo populacijo na tri podskupine: ogroženih (susceptible – S), okuženih (infected – I) in odstranjenih (removed – R). Njihove populacije obravnavamo kot zvezne časovne spremenljivke [4–7]. Okuženi lahko posredujejo bolezen ogroženim (zdravim), odstranjenim pa ne. V kategorijo odstranjenih sodijo ozdraveli, ki postanejo imuni, ali pa bolni, ki umrejo. Posameznik v populaciji se lahko seli med podskupinami le v smeri $S \rightarrow I \rightarrow R$. Če privzamemo populacijo s stalnim številom $N = S(t) + I(t) + R(t)$, opišemo prehode med podskupinami v najpreprostejšem modelu z diferencialnimi enačbami:

$$\dot{S} = -\frac{\beta SI}{N} \quad (1)$$

$$\dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I \quad (2)$$

$$\dot{R} = \gamma I \quad (3)$$

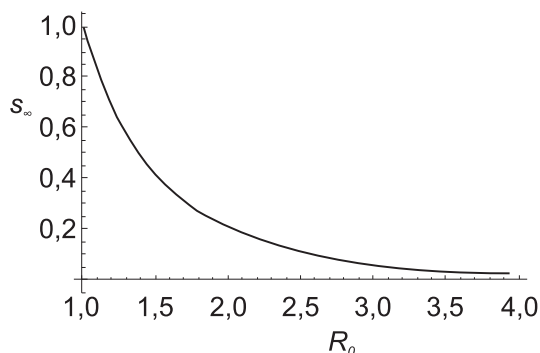
V modelu privzamemo, da je verjetnost okužbe za vse člane podmnožice S enaka in poteka s kontaktno oz. infekcijsko hitrostjo (frekvenco prenosa)

β . Okuženi posameznik stopi v časovni enoti v stik in prenese bolezen na β ogroženih. Inverzna vrednost hitrosti, s katero podskupino bolnih zapuščajo člani (ozdravitve), $1/\gamma$ je povprečna doba kužnosti. Hitrost spreminjanja velikosti podskupine je sorazmerna velikosti podskupine, ki na spremembo lahko vpliva.

V modelu SIR dokaj enostavno ocenimo R_0 . Na začetku epidemije lahko privzamemo, da je število ogroženih konstantno (se skoraj nič ne spreminja) in je enako številu celotne populacije N . Enačba za število okuženih je tedaj $\dot{I} = (\beta - \gamma)I$. Rešitev uganemo: število okuženih narašča eksponentno $I = I_0 e^{(\beta - \gamma)t} = I_0 e^{(R_0 - 1)\gamma t}$. Reprodukcijsko število je, kot omenjeno v prejšnjem poglavju, $R_0 = \beta/\gamma$. V začetni fazi bolezni se števila verjetno ne da določiti iz naraščanja števila obolelih s časom, saj na začetku epidemije testiranja vedno zaostajajo in kažejo manjše število prizadetih, vendar se za posamezne virusne bolezni pozna zaostanek. Na začetku je število odkritih primerov dominirano z odkrivanjem skupin, ne pa inherentno kužnostjo. Kasneje pa socialni dejavniki začnejo vplivati na parametre.

Odgovorimo še na vprašanje, koliko ljudi se bo med epidemijo okužilo, mar vsi? Delimo enačbo (2) z enačbo (1) in dobimo $\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\gamma N}{\beta S}$. Ko ločimo spremenljivki in integriramo od začetka okužbe (ko je $I = 0$), do konca okužbe (ko je $I = 0$ in $S = S_\infty$): ostane $0 = S_0 - S_\infty + \frac{N}{R_0} \ln \frac{S_\infty}{S_0}$. Število ogroženih na začetku je kar enako začetni populaciji $S_0 = N$. Delež okuženih na koncu lahko torej izrazimo kot $s_\infty = \frac{S_\infty}{N}$ in rešitev zadošča transcendentni enačbi $\ln s_\infty = R_0(s_\infty - 1)$. Ta enačba ima dve rešitvi za $R_0 > 1$, a le eno v intervalu $(0, 1)$. Slika 3 kaže delež populacije, ki ga okužba NE prizadene kot funkcijo R_0 . Kot vidimo, npr. za $R_0 = 3$ ne zbolijo zgolj 6 % populacije.

Sistem enačb modela SIR je nelinearen, vendar ima analitične rešitve. Ob pogoju stalne populacije $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$ je dovolj obravnavati le



Slika 3. Delež populacije, ki med epidemijo ne zbolijo, v odvisnosti od R_0 .

dve sklopljeni spremenljivki, tretja pa je podana z njima. Dinamika rešitve je odvisna le od razmerja β in γ (torej od osnovnega reprodukcijskega števila). Analitično rešitev dobimo z nastavkom za $S(t) = S_0 e^{-\xi(t)}$. Iz (1) sledi $\dot{\xi} = -\beta I/N$, iz (3) $\dot{R} = \gamma \dot{\xi} N/\beta$, torej je $R(t) = R_0 + \frac{\gamma}{\beta} N \xi(t)$ in $\xi(t) = \frac{\beta}{N} \int_0^t I(t') dt'$.

Model SIR je pomanjkljiv in obstaja veliko dopoljenih modelov, npr. model, ki upošteva rojstva in smrti. Ta model uporabljamo za opis epidemije, ki traja dolgo v primerjavi z življenjsko dobo. V enačbah upoštevamo frekvenco rojstev Λ in umiranja μ . Enačbe so $\dot{S} = \Lambda - \mu S - \frac{\beta SI}{N}$, $\dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - \mu I$ in $\dot{R} = \gamma I - \mu R$.

V modelu SIS ozdraveli ne postanejo imuni, ampak se vrnejo v skupino ogroženih in $\dot{S} = -\frac{\beta SI}{N} + \gamma I$ ter $\dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$.

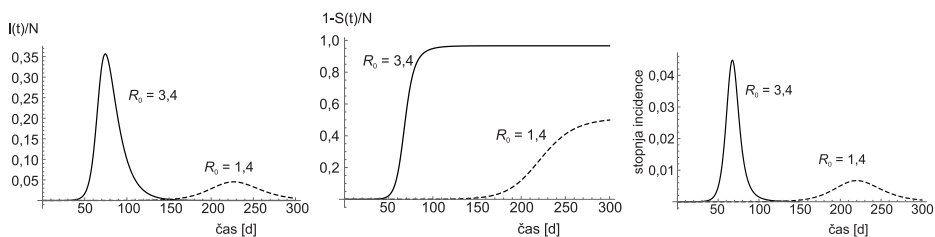
Upoštevamo lahko, da imunost traja le omejeno obdobje (model SIRS) ali pa, da ima bolezen latentno fazo, v kateri bolnik ni kužen (model SEIS ali SEIR). Tu E pomeni izpostavljenost (exposed), torej okuženega, ki pa še ni kužen.

Epidemija Covid-19

Pa si oglejmo, kaj model SIR pove o okužbi s COVID-19 v Sloveniji. Za N vzamemo 2 milijona, za R_0 3,5 (to oceno dobimo iz naklona krivulje $\ln I$ za dejanske podatke iz prvega tedna epidemije) za dobo kužnosti pa 12 dni. Ti podatki v času pisanja članka še niso dobro znani, vzamem bolj pesimističen scenarij. Sistem enačb enostavno rešimo z Mathematico. Krivulje $S(t)$, $I(t)$ in $R(t)$ lahko interpretiramo kot: $1 - S(t)/N$ je stopnja prevalence, časovni odvod stopnje prevalence pa je stopnja incidence $d(1 - \frac{S}{N})/dt$. Prevalenca ni enaka številu okuženih $I(t)$, saj se število okuženih s časom manjša zaradi ozdravitve. Dobljene podatke/grafe je koristno primerjati z grafi, ki jih dobimo v razmerah strogih zajezitvenih ukrepov, ko zmanjšamo infektivno hitrost β s prepovedjo gibanja in srečevanja ter razkuževanjem in zaščitnimi sredstvi, ter skrajšamo dobo kužnosti (to dobo pravzaprav lahko skrajšamo le z zdravljenjem, z epidemičnega vidika jo učinkovito skrajšamo tako, da čim prej po znakih okužbe bolnika osamimo) na 7 dni. Slika 4 kaže primerjave grafov (leva) deleža obolelih, (srednja) stopnje prevalence in (desna) stopnja incidence za slab scenarij z $R_0 = 3,5$ (polna črta) in dober scenarij $R_0 = 1,4$ (črtkana črta).

Na grafu epidemične krivulje na sliki 4 desno se jasno opazi prvo, latentno fazo, ko izbruha ni zaznati (do dneva 40, po slabem scenariju), potem pa drugo fazo eksponentne rasti. Okoli dneva 60 se razmere začnejo umirjati, bolezen doseže vrhunec okoli dneva 70 in konča po stotih dneh. Vloga cepiva je, da cepljeni postanejo imuni ali vsaj manj dovzetni za okužbo in

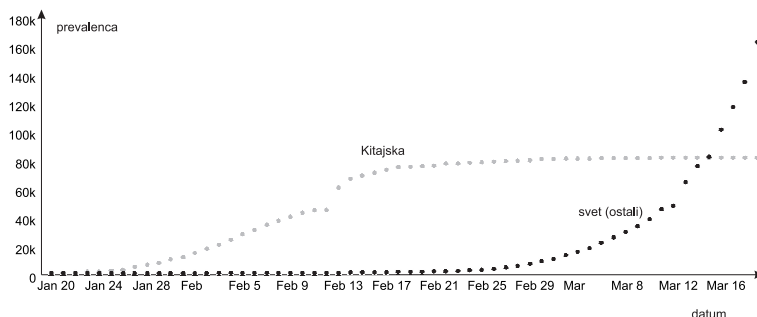
Deterministični model epidemije



Slika 4. Levo: delež okuženih I/N ; sredina: stopnja prevalence; desno: stopnja incidence v dneh po prvem okuženem za slab scenarij z $R_0 = 3,5$ (polna črta) in dober scenarij z $R_0 = 1,4$ (prekinjena črta). Na diagramu desno vidimo »sploščitev krivulje«, z ostrimi ukrepi zmanjšamo incidenco, podaljšamo čas epidemije in na ta način razbremenimo zdravstveni sistem.

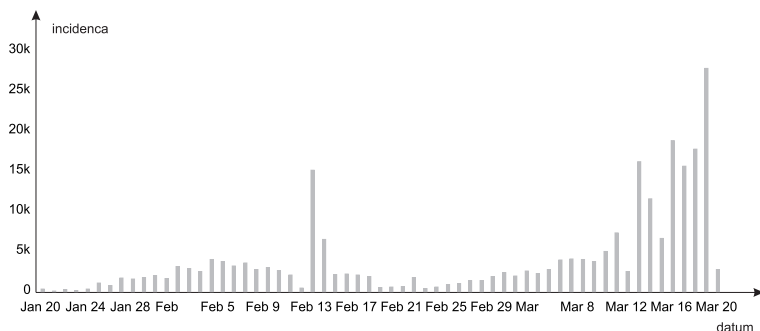
s tem zmanjšamo delež ogroženih v populaciji, kar tudi prispeva k manjšemu razmahu ali celo imunosti družbe. Cepivo za Covid-19 v času priprave članka še ni razvito.

Poglejmo nekaj realnih podatkov, ki jih ažurno objavljajo razni vladni uradi za spremljanje nalezljivih bolezni, npr. [12]. Slika 5 kaže prevalenco, slika 6 pa incidenco bolezni na Kitajskem in v svetu posebej. Očiten je zamik izbruha bolezni po svetu za približno en mesec.



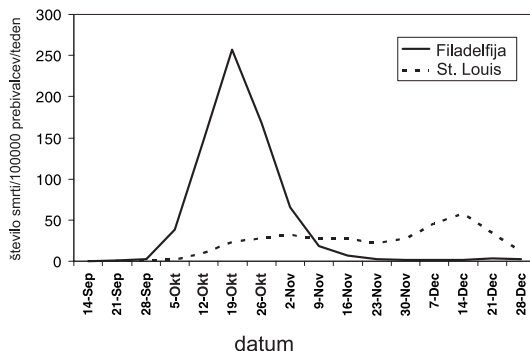
Slika 5. Prevalenca bolezni na Kitajskem in po svetu. Viden je enomesečni zamik izbruha po svetu za Kitajsko. V oči bode skok prevalence na Kitajskem v sredini februarja. Takrat so spremenili potrjevanje bolezni iz testiranja bolezni na potrjevanje iz klinične slike.

Čemu so pravzaprav namenjeni ukrepi, kot je odpoved javnih srečanj in pouka v času epidemije? Pokazali smo, da že v preprostem modelu incidenco okužb lahko opišemo z zvonasto krivuljo. Z ukrepi se zmanjša kontaktna frekvenca in tudi množica ogroženih se lahko zaradi izolacije zmanjša. Slika 7 kaže primer smrtnosti med epidemijo španske gripe leta 1918 v ZDA. V Filadelfiji so epidemijo podcenjevali in so organizirali parado, v St. Louisu pa so parado odpovedali. Vrh števila tedenskih žrtev v Filadelfiji se je zato zgodil hitro in je dosti višji, kot vrh v St. Louisu. Res je, da je



Slika 6. Incidenca bolezni po svetu. Visoka incidenca sredi februarja pomeni spremenjen način dokazovanja okužbe na Kitajskem. Drugače pa sta jasno vidna dva vrha – zgodnejši, začetek februarja, ustreza epidemiji na Kitajskem, kasnejši, sredina marca, pa epidemiji po svetu. Iz časovnega poteka incidence lahko ocenimo osnovne parametre bolezni/modela in spremljamo uspešnost ukrepov za zajezitev.

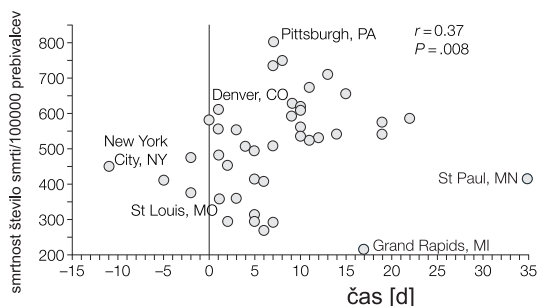
zaradi neprekuženosti, manjše imunosti in manjše kontaktne hitrosti bolezni v St. Louisu trajala dlje (vrh je širši), je pa skupno število mrtvih tam vendarle manjše. Zelo pomembno pri tem ukrepu je tudi, da se z znižanjem in zamikom vrha razbremeni zdravstveni sistem, ki z manjšimi kapacitetami zmore pomagati obolelim.



Slika 7. Histogram presežnega števila mrtvih na 100 000 prebivalcev v enem tednu za posledicami epidemije španske gripe leta 1918 v Filadelfiji in St. Louisu, ZDA. Zaradi odpovedi javnih dogodkov v St. Louisu je bilo število mrtvih tam manjše, epidemija je sicer trajala dlje časa, a so bile posledice milejše. Vir: [3].

Številne študije so raziskovale vpliv zaprtja šol na posledice epidemije. V vsakem primeru je to težka odločitev, ki ima posledice tudi na gospodarstvu in zdravstvu. Vseeno študije kažejo, da zaprtje šol veliko prispeva k blažjemu poteku epidemije [8]. Prej ko so šole zaprli (celo vnaprej, pred pojavom bolezni), manj je bilo smrtnih žrtev, kot kaže diagram na sliki 8.

Deterministični model epidemije

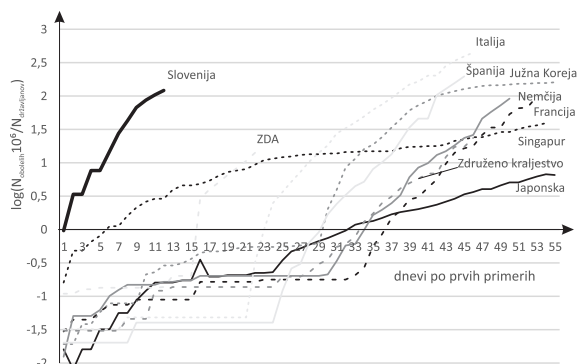


Slika 8. Raziskava primerov smrti v 43 ameriških mestih v času epidemije španske gripe kaže število dodatno umrlih v odvisnosti od dneva zaprtja šol glede na razglasitev epidemije [8].

Analize zapiranja šol kažejo [2], da je šole boljše zapreti pred prvim pojavom okužbe v šoli. Uspešnosti ukrepanja držav pri zaviranju širjenja bolezni se lahko spremlja po objavljenih podatkih in jih lepo pokažejo grafi na sliki 9. Prevalenca v državah, ki odlašajo z ukrepi, poteka povsod podobno, za Covid-19 s približno tretjinskim dnevnim prirastom (iz tega prirasta in dobe kužnosti lahko izračunamo reprodukcijsko število). V državah, kjer ukrepajo ustrezno, je rast števila okuženih bistveno počasnejša. Primer je Japonska, ki ima veliko izkušenj že od izbruha gripe H1N1 [9], očitna pa je sprememba strmine krivulje za Južno Korejo, kjer so po začetnem hudem izbruhu sprejeli ostre ukrepe, ki so stopnjo incidence spustili na raven Japonske. Strategija Singapura, ki tudi dobro deluje, ni zapiranje šol, izvajajo pa zelo veliko testiranje, kontrol in skrbijo za primerno dezinfekcijo in izolacijo [13].

Pri vsaki bolezni je najbolj zaskrbljujoča smrtnost, to je delež obolelih, katerih bolezen ima smrtni izid. V tabeli 1 so primerjave med različnimi virusnimi boleznimi. Nekatere bolezni so močno nalezljive in imajo veliko smrtnost. Če je bolezen kratka, kot npr. ebola, njene epidemije pravzaprav ne povzročajo veliko žrtev, saj bolezen izzveni na omejenem območju, preden se lahko raznese širše. Bolezni z dolgo inkubacijsko dobo ali počasnim potekom, kot npr. okužba s HIV, tudi ne vzbujajo toliko strahu, ker je ljudje ne zaznajo kot nevarnost. Zelo razširjena in ponavljajoča se bolezen gripa ima relativno nizko reprodukcijo in smrtnost, a zaradi svoje razširjenosti povzroča veliko žrtev. Kako se s temi boleznimi vzporeja Sars-Cov-2? Kako primerjamo vsakoletne epidemije gripe, prehladov (tudi virusi tipa corona) z epidemijo Covida-19?

Smrtnost Covida-19 je relativno visoka, nekaj desetkrat višja kot pri gripi. Tudi reprodukcijsko število je dvakrat večje. A vendar, povprečna starost umrlih je dokaj visoka, začetni podatki za Italijo govorijo o starosti 81 let, večina teh pa je že imela obstoječe bolezni (60 % umrlih vsaj 3,



Slika 9. Grafi prevalence bolezni v različnih državah, zamaknjeni v datumu tako, da ustrezajo sočasemu zabeleženju prvega (ali prvih) primerov okužbe. Število okuženih je normirano na število milijonov prebivalcev države. Na Japonskem imajo izkušnje iz prejšnjih epidemij, ki so z evropskega vidika izzvenele daleč na vzhodu.

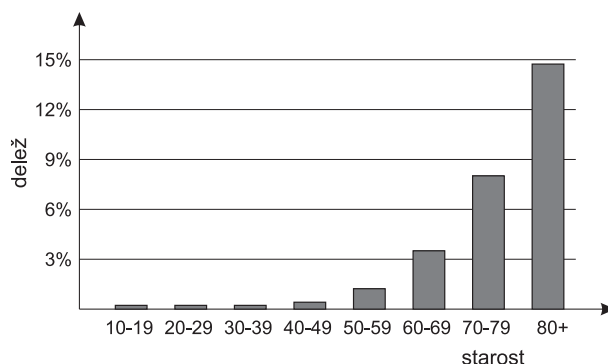
bolezen	prenos	R_0	smrtnost [%]
ošpice	po zraku	12–18	1–3
davica	slina	6–7	5–10
črne koze	kapljično	5–7	30–65
mumps	kapljično	4–7	1
oslovski kašelj	kapljično	5,5	3,7
HIV/AIDS	spolno	2–5	85
SARS	kapljično	2–5	11
COVID-19	kapljično	1,4–3,9	3,5
španska gripa	kapljično	2–3	>2,5
ebola	telesne tekočine	1,5–2,5	85
gripa	kapljično	1,4	<0,1
MERS	kapljično	0,3–0,8	45

Tabela 1. Različne bolezni, način njihovega prenosa, osnovno reprodukcijsko število in njihova stopnja smrtnosti.

90 % pa vsaj eno), najmlajši umrli je imel 55 let. Porazdelitev smrtnosti po starostnih skupinah je na sliki 10. Podatki za Italijo v najhujših dneh govorijo o stotinah mrtvih. Ko slišimo podatek o 100 smrtih, se to zdi veliko, a moramo ta podatek primerjati z normalnimi razmerami.

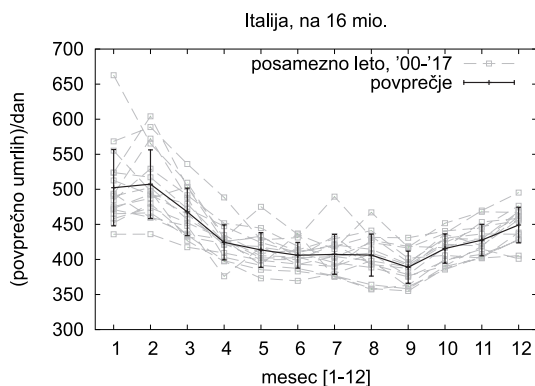
Statistika števila smrti v enem dnevu, povprečna čez cel mesec, za zadnjih 18 let v območju Lombardije in Veneta je prikazana na sliki 11. Število ustreza območju s populacijo 16 milijonov, številke za celo Italijo so slabe štirikrat višje. Črn graf kaže povprečje čez vsa leta, označena je tudi stan-

Deterministični model epidemije



Slika 10. Delež smrtnih primerov po starostnih skupinah za bolezen Covid-19.

dardna deviacija povprečja. Razlika med poletjem in zimo je okoli 100/dan, raztros pa je januarja in februarja tudi precej večji. Sezonska variacija skupaj z upoštevanim raztrosom je v prvem tednu epidemije ustrezala velikostnemu redu števila dnevnih žrtev zaradi nove bolezni. Morda so zato v Italiji podcenjevali nevarnost bolezni. Trenutni podatki govorijo o več sto dnevni žrtvah, kar pa je že statistično pomembno.



Slika 11. Povprečno dnevno število umrlih v Lombardiji in Venetu za posamezni mesec za zadnjih osemnajst let in povprečje čez ta leta kaže, da se ob koncu zime število umrlih vedno poveča, tja do 100 primerov več kot poleti. Tudi raztros je velik – podoben številu mrtvih, kot jih poročajo v prvem tednu izbruha. Vir: [10].

Nova bolezen nas skrbi, ker je nova in populacije še nimajo razvite imunosti, nekaterih njenih lastnosti še ne poznamo, npr. obnašanja pri toplejšem vremenu, ponovljivosti okužbe, nimamo pa še zdravila in cepiva. Kot zdravilo obetajo stara zdravila, ki jih uporabljajo pri zdravljenju malarije, razvijajo pa nova, ki so podobna zdravilom za ebolo in bodo verjetno že letos

prestala klinične teste. Prav tako lahko že letos pričakujemo prva cepiva. S precepljenjem populacije povečamo skupinsko imunost in zmanjšamo hitrost širjenja in nevarnost bolezni. Če obstaja nevarnost ponavljanja, bodo naši organizmi po večkratni izpostavljenosti verjetno bolj pripravljeni na okužbo in bolezen lahko upade na nivo navadnega prehlada ali gripe.

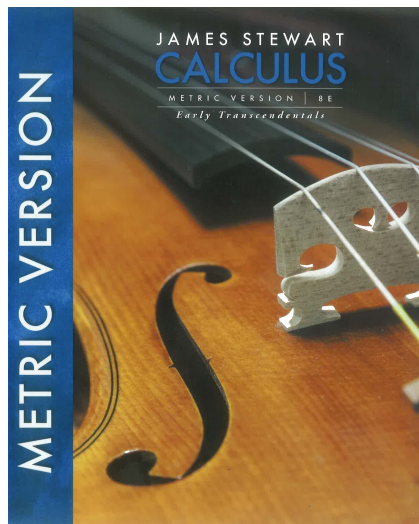
LITERATURA

- [1] An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it Daniel Bernoulli, Reviewed by Sally Blower* AIDS Institute and Department of Biomathematics, David Geffen School of Medicine at UCLA, 1100 Glendon Avenue, PH2, Los Angeles, CA 90024, USA, *Rev. Med. Virol.* 2004; 14: 275–288.
- [2] N. M. Ferguson, D. A. T. Cummings, C. Fraser, J. C. Cajka, P. C. Cooley in D. S. Burke, *Strategies for mitigating an influenza pandemic*, *Nature*, **442** (2006), 448–452.
- [3] R. J. Hatchett, C. E. Mecher in M. Lipsitch, *Public health interventions and epidemic intensity during the 1918 influenza pandemic*, *PNAS* May 1, 2007, 104 (18), 7582–7587; dostopno na doi.org/10.1073/pnas.0610941104, ogled 24. 3. 2020, edited by B. H. Singer, Princeton University, Princeton, NJ, and approved February 14, 2007 (received for review December 9, 2006).
- [4] W. Kermack in A. McKendrick, *Contributions to the mathematical theory of epidemics–I*, *Bulletin of Mathematical Biology*, **53** (1991), 33–55.
- [5] W. Kermack in A. McKendrick, *Contributions to the mathematical theory of epidemics–II, The problem of endemicity*, *Bulletin of Mathematical Biology*, **53** (1991), 57–87.
- [6] W. Kermack in A. McKendrick, *Contributions to the mathematical theory of epidemics–III, Further studies of the problem of endemicity*, *Bulletin of Mathematical Biology*, **53** (1991), 89–118.
- [7] T. Koprivnikar, *Model SIR*, diplomsko delo, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2017.
- [8] H. Markel, H. B. Lipman, J. A. Navarro, A. Sloan, J. R. Michalsen, A. M. Stern in M. S. Cetron, *Nonpharmaceutical Interventions Implemented by US Cities During the 1918-1919 Influenza Pandemic*, *JAMA*, 2007, 298(6), 644–654.
- [9] Substantial Impact of School Closure on the Transmission Dynamics during the Pandemic FluH1N1-2009 in Oita, Japan, Shoko Kawano, Masayuki Kakehashi, *PLOS ONE* DOI:10.1371/journal.pone.0144839 December 15, 2015.
- [10] Marko Žnidarič, osebna komunikacija
- [11] *Mathematical modelling of infectious disease*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_modelling_of_infectious_disease, ogled 24. 3. 2020.
- [12] *Coronavirus disease (COVID-2019) situation reports*, dostopno na www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/situation-reports, ogled 24. 3. 2020.
- [13] *No plans to close schools for now, says Education Minister Ong Ye Kung*, dostopno na www.straitstimes.com/singapore/health/no-plans-to-close-schools-for-now-says-education-minister-ong-ye-kung, ogled 24. 3. 2020.

NOVE KNJIGE

James Stewart, Calculus, Early transcendentals, Eight Edition, International Metric Version, Cengage Learning 2016, 1182 strani.

Zajetni učbenik, ki sijajno združuje teorijo in prakso (tj. matematične vsebine in njihove aplikacije), je premišljeno zasnovan tako, da študentu predstavi tako uporabnost kot lepoto *infinitesimalnega računa*. Sledi najnovejšim pedagoškim usmeritvam, ki vključujejo tudi raznovrstno uporabo računalnikov, od vizualizacije do numeričnega in grafičnega eksperimentiranja. Ne posveča se zgolj razvoju tehničnih kompetenc, osredotoča se na *konceptualno razumevanje*, ki ga



razvija predvsem s skrbnim izborom problemov, v skladu z maksimo, da je umetnost poučevanja umetnost pomagati študentom pri odkrivanju oziroma raziskovanju določenega področja. Težavnost problemov se v vsakem poglavju počasi stopnjuje, v razponu od takšnih, ki preverjajo zgolj razumevanje osnovnih konceptov in usvajanje osnovnih računskih veščin, do zahtevnejših problemov, ki vključujejo aplikacije in dokaze.

Po besedah avtorja je učbenik napisan v skladu s t. i. *Četvernim pravilom* (angl. *Rule of four*), ki priporoča, da je snov predstavljena *geometrijsko, numerično, algebraično* ter *verbalno*. Opremljen je s številnimi barvnimi diagrami, slikami, fotografijami ter podprt z dodatnimi materiali, dostopnimi na spletni strani stewartcalculus.com. Poleg obilice standardnih, računskih in dokazovalnih nalog, ki so večini tradicionalno šolanih študentov najbolj domače, ponuja tudi nestandardne samostojne ali timske izzive oziroma projekte: *aplikativne projekte* (ki naj bi posebej ugajali študentovi domišljiji), *laboratorijske projekte* (ki vključujejo uporabo tehnologije), *raziskovalne projekte* (pri katerih študent prepozna vzorce ali raziskuje

določene vidike geometrije) in *pisne projekte* (pri katerih je treba napisati kratek esej, npr. o tem, kako je prišlo do nekega matematičnega odkritja v zgodovini matematike). Tak pristop seveda omogoča razvoj neprimerno več študentskih kompetenc kot tradicionalni pristop, ki poudarja predvsem računske in dokazovalne veščine in nagrajuje zlasti zmožnost pridnega učenja metod in postopkov, ne postavlja pa v ospredje konceptualnega razumevanja, ne razvija veselja do samostojnega in timskega eksperimentiranja in raziskovanja (ne zgodovine matematike ne novih matematičnih področij) in ne spodbuja razvijanja študentskih kompetenc ustne in pisne ubeseditve matematičnih vsebin, ki na določeni stopnji, npr. ko je treba začeti pripravljati seminarje ali pisati znanstvene članke, postanejo prav tako nepogrešljive. Knjigo zaokrožajo številni dodatki, od diagnostičnih testov za preverjanje predznanja študentov (potrebne za razumevanje infinitezimalnega računa) do seznamov formul in vprašanj za preverjanje konceptualnega razumevanja za vsako od dvanaestih poglavij. Ta poglavja so: 1. *Funkcije in modeli*, 2. *Limite in odvodi*, 3. *Pravila odvajanja*, 4. *Uporabe odvodov*, 5. *Integrali*, 6. *Uporabe integralov*, 7. *Integracijske tehnike*, 8. *Nadaljnje uporabe integralov*, 9. *Diferencialne enačbe*, 10. *Parametrične enačbe in polarne koordinate*, 11. *Zaporedja in vrste*, 12. *Vektorji in prostorska geometrija*.

Med številnimi odlikami knjige je vredno izpostaviti nekaj primerov, kako zna avtor poudariti bistveno in pritegniti bralevo pozornost. Tako npr. v uvodnem poglavju *Pregled infinitezimalnega računa* (angl. *A Preview of Calculus*) predstavi nekaj osnovnih problemov in konceptov (problem računanja ploščin, problem iskanja tangent, pojem hitrosti, pojem limite zaporedja in pojem vrste), ki so po eni strani vodili k razvoju infinitezimalnega računa, po drugi strani pa študentu omogočajo hitro osnovno orientacijo po področju in razumevanje temeljnih idej, saj se da njihovo vsebino dovolj jasno predstaviti še pred uvedbo natančnih definicij; te so se tudi v zgodovini matematike tako ali tako pojavile šele z dolgoletnim zamikom, potem ko so jih matematiki dolgo uporabljali nerigorozno, brez skrbi za strogo definicij.

Avtor v vsakem poglavju jasno poudari nekaj temeljnih resnic, ki lahko študentu zelo olajšajo razumevanje sicer zahtevne in obsežne snovi. Tako npr. eksplicitno pove, da so temeljni objekt, s katerim se ukvarja infinitezimalni račun, *funkcije*. Ker se da s funkcijami modelirati najrazličnejše pojave in procese v naravi in družbi, je potrebno, da jih znamo analizirati, na različne načine računati z njimi, pa tudi proučevati, razvijati in interpretirati matematične modele, v katerih nastopajo. Pri študiju funkcij je nepogrešljiv pojem *limite*, na katerem temeljijo tudi pojmi *zveznosti*, *odvoda* in *integrala*. Avtor meni, »da bi dejansko lahko definirali infinitezimalni račun kot tisti del matematike, ki se ukvarja z *limitami*« (str. 8).

Za primerjavo omenimo, da je v knjigi Sterling K. Berberian: *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag, 1994, na strani 80 podan precej drugačen pogled: »V elementarnem kalkulusu sta koncepta *zveznosti* in *odvoda* naslikana z istim čopičem in ta čopič se imenuje »*limite*«; to je dobro, da se pokaže enotnost v procesih infinitezimalnega računa. Vendar, ko pogledamo ta koncepta natančneje, vidimo, da sta precej različna: *zveznost* ima opraviti z interakcijo med funkcijami in odprtimi množicami, medtem ko *diferenciabilnost* vključuje še algebraično strukturo obsega realnih števil (nenehno imamo opravka z »*diferenčnimi kvocienti*«).

Poglavje o *diferencialnih enačbah* uvaja misel, da matematični model pogosto privzame obliko diferencialne enačbe. Čeprav pogosto ni mogoče najti eksplicitne formule za rešitev diferencialne enačbe, pa lahko grafični in numerični pristop omogočita vsaj kvalitativno razumevanje raziskovanega procesa, ki ga modelira dana enačba.

Knjiga, ki je napisana zelo jasno in je tudi pregledno urejena, bo ugajala vsem študentom in učiteljem matematike, ki si želijo infinitezimalni račun, tudi če o njem že vedo zelo veliko, spoznati na drugačen, modernejši način, z veliko poudarka na konceptualnem razumevanju, nazornosti razlage, številnih zanimivih zgledih ter praktičnih aplikacijah in privlačnih projektih.

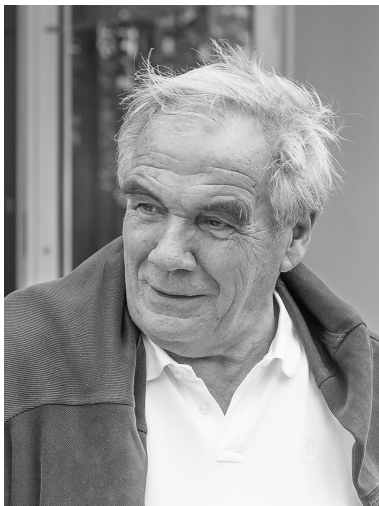
Jurij Kovič

Zoisova nagrada za življenjsko delo akademiku Josipu Globevniku

Akademik prof. dr. Josip Globevnik, zaslužni profesor Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, je v letu 2019 prejel Zoisovo nagrado za življenjsko delo na področju matematike, natančneje, kompleksne analize. To naravno ponujeno priložnost želim izkoristiti za kratko predstavitev njegovega življenja in dela.

Josip Globevnik je bil rojen v Ljubljani. Matematiko je študiral na Univerzi v Ljubljani, kjer je diplomiral leta 1968. Zatem je leta 1971 magistriral na Univerzi v Zagrebu pri prof. dr. Svetozarju Kurepi z delom *Ulomljene potence operatorjev*, leta 1972 pa je doktoriral iz matematike na Univerzi v Ljubljani pri prof. dr. Ivanu Vidavu z disertacijo *Analitične funkcije s konstantno normo*. Po doktoratu se je intenzivno usmeril v raziskovalno delo na področju kompleksne analize (del matematične analize) in je kot prvi Slovenec po akademiku Josipu Plemlju navezal vrsto tesnih stikov s tujimi raziskovalci na tem področju; več o tem v nadaljevanju. V letih 1968–73 je bil asistent za matematiko, v letih 1973–78 docent, 1978–83 izredni profesor in od leta 1983 do upokojitve leta 2012 redni profesor na Univerzi v Ljubljani. Do leta 1988 je poučeval matematiko na Fakulteti za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, od 1988 dalje pa na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo ter kasneje Fakulteti za matematiko in fiziko. Leta 2013 je bil imenovan za zaslužnega profesorja Univerze v Ljubljani. V letih 1979–86 je bil predstojnik Oddelka za matematiko na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani, v letih 1993–95 pa je bil predstojnik Oddelka za matematiko na Univerzi v Ljubljani. V tem obdobju se je izpod okrilja Fakultete za naravoslovje in tehnologijo oblikovala vrsta neodvisnih fakultet, med njimi Fakulteta za matematiko in fiziko. Pri njenem ustanavljanju je skupaj s prof. dr. Martinom Čopičem, ki je tedaj vodil Oddelek za fiziko, Globevnik odigral ključno vlogo.

Vse od svojega doktorata v letu 1972 dalje je bil Globevnik vodilni slovenski strokovnjak na področju kompleksne analize. Njegovo raziskovalno delo je bilo pionirske narave na več pomembnih področjih, ki so na kratko opisana v nadaljevanju, in je vodilo v nove smeri raziskovanja, ki so danes zelo aktualne. V času svoje kariere je bil na vrsti daljših gostovanj na pomembnih tujih univerzah in raziskovalnih ustanovah, še posebej v ZDA. Bil je gostujoči docent na University of Kentucky (ZDA, 1973/74) in gostujoči profesor na University of Washington v Seattlu (ZDA, 1978/79, dva trimestra v 1984, dva trimestra v 1989/90, en trimester v 1996), na University of Wisconsin v Madisonu (ZDA, prvo polletje 1985/86), na University of California v San Diegu (ZDA, en trimester v 1992, en trimester v 2004)



Slika 1. Josip Globevnik

in na University of Michigan v Ann Arborju (ZDA, prvo polletje 2001/2). Krajši čas je gostoval na Universidade Federal v Riu de Janeiru (Brazilija), na Trinity College v Dublinu (Irska), na Univerzi Bar-Ilan v Ramat Ganu v Izraelu, na Institutu Mittag-Leffler v Stockholmu (Švedska) in na Université Paul Sabatier v Toulousu (Francija). Z vabljenimi predavanji se je udeležil dolge vrste mednarodnih konferenc o različnih področjih kompleksne analize. S predavanji je obiskal več univerz v Evropi, ZDA, Izraelu, Koreji in na Kitajskem. Od leta 1974 dalje je član American Mathematical Society.

Globevnik je vseskozi sledil novim raziskovalnim trendom in je delal na zelo raznovrstnih problemih. V številnih od njih je vpeljal nove metode, ki so jih kasneje začeli uporabljati tudi drugi raziskovalci. Vselej sta mu bili najbolj pomembni kakovost in popolnost dosežkov; ničesar ni želel objaviti, dokler ni imel natanko izdelanih vseh podrobnosti in je bil povsem prepričan, da je njegova rešitev pravilna oziroma da, kot je pogosto rad dejal, »drži vodo«. V tem pogledu je Globevnik nadaljeval tradicijo vrhunskih slovenskih matematikov Ivana Vidava in Josipa Plemlja, torej svojega matematičnega očeta in deda. To zavzetost za vrhunsko kakovost in inovativnost raziskovanja je prenašal tudi na svoje študente in znanstvene sodelavce. Vselej je poudarjal, da odlična znanost in še posebej matematika lahko nastaja kjerkoli in ne samo v pisarni, najboljše ideje pa se v resnici le redko kdaj pojavijo ob sedenju za pisalno mizo ali ob računalniku. Vsa svoja znanstvena dela je najprej izjemno vestno lepopisno napisal z nalivnim peresom na papir v toliko iteracijah, da je nastal končni izdelek, ki ga je šele nato obdelal računalniško.

V svoji karieri je Globevnik objavil 116 originalnih znanstvenih del, skoraj vse v mednarodnih matematičnih revijah, od tega večino v visokokakovostnih revijah, ki po kriteriju faktorja vpliva sodijo v prvi kvartil. Vrsta njegovih del je bila objavljenih v najelitnejših matematičnih revijah, kot so *Annals of Mathematics* (2 objavi, od tega ena v letu 2015), *Inventiones Math.*, *American J. Math.*, *Math. Annalen*, *Transactions of the American Math. Soc.*, *Crelle's J.* in drugih. V svojih delih je obravnaval probleme iz kompleksne analize in sorodnih področij, med njimi zaloge vrednosti vektorskih holomorfnih funkcij, robne lastnosti holomorfnih funkcij več spremenljivk in analitičnih množic, prave holomorfne vložitve območij v kompleksni ravnini v dvorazsežni kompleksni evklidski prostor, integralske karakterizacije holomorfnih funkcij ene spremenljivke in integralske karakterizacije robnih vrednosti holomorfnih funkcij več spremenljivk, analitične diske z robovi v maksimalno realnih podmnogoterostih in karakterizacije robnih vrednosti holomorfnih funkcij s principom argumenta. Leta 2015 je z elegantno in presenetljivo konstrukcijo kompletne kompleksne hiperploskve v enotski krogli evklidskega prostora poljubne dimezije več od 1 podal popolno rešitev problema Paula Yanga iz 1977; ta rezultat je bil objavljen v eni izmed najelitnejših matematičnih revij *Annals of Mathematics* in je bil izbran med najboljše dosežke slovenske znanosti na področju naravoslovja in matematike v Sloveniji po izboru ARRS v letu 2015.

Kljub temu da je do leta 1988 poučeval matematiko na Fakulteti za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, je bil Globevnik že v svojem zgodnjem obdobju znanstveno in kot mentor prisoten tudi na Oddelku za matematiko tedanje Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, kamor je nato prišel kot redni profesor leta 1988. Zatem je dolgo vrsto let predaval temeljna predmeta iz matematične analize v 1. in 2. letniku študija matematike ter osnovni predmet iz kompleksne analize. Občasno je predaval tudi podiplomske oziroma doktorske predmete iz analize. Bil je zelo priljubljen predavatelj, saj je predaval izredno nazorno in zavzeto, z njemu lastno energijo in karizmatičnostjo. Vselej se je osredotočal na bistvene ideje, ki jih je na koncu daljših dokazov rad ponovno povzel in posebej poudaril.

Z namenom razvoja kompleksne analize in sorodnih področij v Sloveniji je že leta 1975 ustanovil *Seminar za kompleksno analizo* na Oddelku za matematiko, ki deluje brez presledka vse do danes. Okrog njega se je postopoma oblikovala raziskovalna skupina za kompleksno analizo, ki je danes osrednja in najbolj aktivna skupina na področju matematične analize v Sloveniji in predstavlja jedro programske skupine *Analiza in geometrija* pri ARRS. Podpisani sem bil njegov prvi študent s področja analize funkcij več kompleksnih spremenljivk, vendar me je po enem letu usmeril na nadaljevanje doktorskega študija k svojemu sodelavcu, profesorju Edgarju Lee Stoutu na University of Washington v Seattlu, ZDA, kjer je bil Globevnik

gostujoči profesor v letu 1978/79 in še večkrat kasneje. Njegovi naslednji študenti, sedanji člani skupine za kompleksno in harmonično analizo, so bili Miran Černe (magisterij 1989, doktorat pri meni leta 1994 na University of Wisconsin-Madison, ZDA), Darja Govekar Leban (doktorat 1999), Oliver Dragičević (diploma 1998, magisterij 2001, doktorat l. 2003 pri Alexandru Volbergu na Michigan State University, East Lansing, ZDA), Barbara Drinovc Drnovšek (magisterij 1996, doktorat 2003), in Marko Slapar (diploma 1997, doktorat l. 2003 pri Johnu Eriku Fornaessu na University of Michigan v Ann Arbor, ZDA). Poleg navedenih je Globevnik pomagal vrsti slovenskih študentov z različnih področjih matematike pri iskanju ustreznih kontaktov in možnih mentorjev v tujini ter pri pisanju priporočilnih pisem. Tudi pisec pričujočega prispevka je med tistimi srečneži, ki jih je Globevnik s svojo modrostjo in dobrim nasvetom v pravem trenutku usmeril na dobro pot in jim tudi kasneje stal ob strani.

Za svoje znanstveno delo je Globevnik prejel vrsto nagrad in priznanj. Prva med njimi je bila leta 1975 nagrada za raziskovalno delo na matematični balkanijadi v Bolgariji. Leta 1976 je prejel nagrado Borisa Kidriča za vrhunske znanstvene dosežke (enakovredno sedanji Zoisovi nagradi). Leta 1985 je bil izvoljen za izrednega člana Slovenske akademije znanosti in umetnosti (SAZU), leta 1989 pa je postal njen redni član. V letih 2008–14 je opravljal funkcijo tajnika III. razreda SAZU za matematične, fizikalne, kemijske in tehniške vede. Leta 2017 je bil izvoljen za rednega člana mednarodne inženirske akademije v Moskvi (naslednica inženirske akademije Sovjetske zveze). Kot je bilo že uvodoma omenjeno, je leta 2019 prejel Zoisovo nagrado za življenjsko delo.

Za zaključek naj še enkrat poudarim, da je bil Josip Globevnik med prvimi matematiki v Sloveniji, ki so v 70. letih kljub tedaj zelo skromnim sredstvom za znanstveno delo na področju matematike bistveno prispevali k odprtju naše dežele v svetovne tokove raziskovanja na tem področju. To je zelo velika stvar, ki jo je težko povsem razumeti v luči današnjih, bistveno ugodnejših razmer. Številnim mladim matematikom je širokogrudno pomagal odpirati vrata v svet z vzpodbujanjem in s priporočili za študij na dobrih tujih univerzah. Ta njegov prispevek k razvoju matematike v Sloveniji je po mojem mnenju prav tako pomemben kot njegovi prvorazredni raziskovalni dosežki, ki bodo ostali vidni del svetovne zakladnice znanja na področju matematične analize.

Ob prejemu Zoisove nagrade za življenjsko delo profesorju Josipu Globevniku, našemu dragemu Pikotu, v svojem imenu ter v imenu sodelavcev programske skupine Analiza in geometrija iskreno čestitam ter mu želim še naprej veliko zadovoljstva z matematiko.

Franc Forstnerič

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 66 (2019)
številke 1–6, strani 1–240

Članki — Articles

Generatorji praštevil (Janko Bračič)	1–10
Bertrandov postulat (Aleksander Simonič)	11–21
O enačbi Korteweg-de Vries (Timotej Lemut)	22–29
Trikotnik, enakoosna hiperbola in Bernoullijeva lemniskata (Marko in Nada Razpet)	41–53
Difuzijska traktografija (Aleš Mohorič, Igor Serša in Matic Noč)	54–63
Katakavstika Bernoullijeve lemniskate (Marko Razpet)	81–89
Homopolarni motorji (Robert Hauko)	90–104
Leonardo da Vinci (1452–1519) – ob petstoletnici njegove smrti: Leonardo in matematika (Jurij Kovič)	121–131
Nobelova nagrada odkriteljema planetov drugih zvezd (Tomaž Zwitter)	132–145
Novosti na splošni maturi 2021 pri predmetu matematika (Iztok Banič, Jaka Erker, Mateja Fošnarič, Alojz Grahor, Tatjana Levstek, Mateja Škrlec in Janez Žerovnik)	161–171
Podhlajene vodne kapljice v ozračju (Gregor Skok in Jože Rakovec)	172–183
Od integralov do ogrlic (Barbara Drinovec Drnovšek)	201–210
Kongrui večkotniških števil (Marko Razpet)	211–220
Deterministični model epidemije (Aleš Mohorič)	221–232

Iz zgodovine — Miscellanea

Zanimiva knjiga o mehaniki in nekaj spominov na profesorja Kuhlja (Peter Legiša)	35–39
Mere, merska reforma in nekaj zgodovine v Močnikovih učbenikih (Peter Legiša)	67–74
G. Cardano, The Rules of Algebra (Ars Magna) (Jurij Kovič)	75–III
Leonardo da Vinci (1452–1519) – ob petstoletnici njegove smrti: Renesančni človek (Jurij Kovič)	105–113
Spomini na študijska leta in profesorja Plemlja (Marko in Nada Razpet)	146–151

Nove knjige — New books

Mario Livio, The Equation That Couldn't Be Solved (Jurij Kovič)	30–33
Robin Wilson, Euler's Pioneering equation (Jurij Kovič)	33–34
Carlo Rovelli, Zapovrstje časa (Alojz Kodre)	184–186
Elena Deza in Michel Marie Deza, Figurate Numbers (Marko Razpet)	187–190
James Stewart, Calculus, Early transcendentals (Jurij Kovič)	233–235

Vesti — News

Vabilo za predloge priznanj DMFA Slovenije za leto 2019 (Boštjan Kuzman)	40
Obvestilo (Aleš Mohorič)	40–III
MaRS 2019 (David Gajser)	64–66
Predsednik Pahor podelil srebrni red za zasluge DMFA Slovenije (uredništvo)	114–117
Šestindvajseto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Marjan Jerman)	117–XI
Sedemdeset let DMFA Slovenije, 72. občni zbor DMFA Slovenije (Pripravila Janez Krušič in Nada Razpet)	152–158
Srečanje »Women of mathematics on the Mediterranean shores« na Bledu in Srečanje mladih raziskovalcev v matematiki (Marjeta Kramar Fijavž, Jasna Prezelj, Anja Petković)	159–XV
Profesor Frederick Duncan Michael Haldane, častni član DMFA Slovenije (Uredništvo)	190–191
Kristijan Kocbek, Margareta Obrovnik Hlačar, Jožef Senekovič in Sašo Strle novi prejemniki priznanj DMFA Slovenije (Uredništvo)	192–195
Blinčeve nagrade (Aleš Mohorič, urednik za fiziko)	196–197
Zoisove nagrade in priznanja ter Puhove nagrade in priznanja 2019 (za uredništvo: Aleš Mohorič)	197–XIX
Zoisova nagrada za življensko delo akademiku Josipu Globevniku (Franc Forstnerič)	236–239
Letno kazalo (uredništvo)	240–XXIII

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 2019

Letnik 66, številka 6

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Od integralov do ogrlic (Barbara Drinovec Drnovšek)	201–210
Kongrui večkotniških števil (Marko Razpet)	211–220
Deterministični model epidemije (Aleš Mohorič)	221–232
Nove knjige	
James Stewart, Calculus, Early transcendentals (Jurij Kovič)	233–235
Vesti	
Zoisova nagrada za življensko delo akademiku Josipu Globevniku (Franc Forstnerič)	236–239
Letno kazalo (uredništvo)	240–XXIII

CONTENTS

Articles	Pages
From integrals to necklaces (Barbara Drinovec Drnovšek)	201–210
Congrua of polygonal numbers (Marko Razpet)	211–220
Deterministic model of epidemy (Aleš Mohorič)	221–232
New books	233–235
News	236–XXIII

Na naslovnici: Geometrijska predstavitev figurativnih števil (glej članek na straneh 211–220).